개념원리®

문제기본서

RPM

수학 Ⅰ

정답과 풀이

01 지수

교과서 문제 정복하기

본문 7쪽

0001 -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로
$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$
따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.

답 -2

0002 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로
$x^4-81=0$, $(x^2+9)(x^2-9)=0$
$(x^2+9)(x+3)(x-3)=0$
$\therefore x=\pm3i$ 또는 $x=\pm3$
따라서 81의 네제곱근 중 실수인 것은 -3, 3이다.

답 -3, 3

0003 0.027의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=0.027$이므로
$x^3-0.027=0$, $(x-0.3)(x^2+0.3x+0.09)=0$
이때 $x^2+0.3x+0.09=0$은 실근을 갖지 않으므로
0.027의 세제곱근 중 실수인 것은 0.3이다.

답 0.3

0004 $(-2)^4=16$의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로
$x^4-16=0$, $(x^2+4)(x^2-4)=0$
$(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$
따라서 $(-2)^4$의 네제곱근 중 실수인 것은 -2, 2이다.

답 -2, 2

0005 -16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=-16$이므로 x의 값 중 실수인 것은 없다.

답 없다.

0006 $\sqrt[3]{0.008}=\sqrt[3]{0.2^3}=0.2$

답 0.2

0007 $\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$ 답 -3

0008 $\sqrt[6]{(-1)^6}=\sqrt[6]{1^6}=1$ 답 1

0009 $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^3}=-\frac{2}{3}$

답 $-\frac{2}{3}$

0010 답 ㄱ, ㄴ

0011 $\{\sqrt[3]{(-2)^4}\}^3=(\sqrt[3]{2^4})^3=2^4=16$

답 16

0012 $(\sqrt[8]{16})^2=\sqrt[8]{16^2}=\sqrt[8]{(2^4)^2}=\sqrt[8]{2^8}=2$

답 2

0013 $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4\times16}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

답 4

0014 $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\frac{80}{5}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

답 2

0015 $\sqrt[3]{\sqrt{729}}\times\sqrt{\sqrt{256}}=\sqrt[6]{729}\times\sqrt[4]{256}=\sqrt[6]{3^6}\times\sqrt[4]{4^4}$
$=3\times4=12$

답 12

0016 답 1 **0017** 답 1

0018 답 $\frac{1}{16}$ **0019** 답 $\frac{1}{25}$

0020 답 9 **0021** 답 81

0022 답 $\frac{1}{4}$ **0023** 답 $\frac{4}{5}$

0024 답 $-\frac{2}{3}$ **0025** 답 $\frac{1}{3}$

0026 $(a^{\frac{3}{4}})^2\times a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{7}{4}}$

답 $a^{\frac{7}{4}}$

0027 $(a^3b^2)^{\frac{1}{12}}\times(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}})^4=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{4}{3}}b$
$=a^{\frac{1}{4}+\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{6}+1}=a^{\frac{19}{12}}b^{\frac{7}{6}}$

답 $a^{\frac{19}{12}}b^{\frac{7}{6}}$

0028 $(\sqrt{a^3}\times\sqrt[5]{a}\times a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{5}}\times a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$
$=(a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{5}}$

답 $a^{\frac{2}{5}}$

0029 $(a^{-\frac{3}{4}})^2\times\sqrt{a}\div a^{\frac{3}{4}}=a^{-\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{3}{4}}=a^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}=a^{-\frac{7}{4}}$

답 $a^{-\frac{7}{4}}$

0030 $(3^{\sqrt{4}})^{\sqrt{25}}=3^{\sqrt{100}}=3^{10}$

답 3^{10}

0031 $8^{-\frac{\sqrt{3}}{6}}\times 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=(2^3)^{-\frac{\sqrt{3}}{6}}\times 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\times 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2^{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$

답 1

0032 $4^{\sqrt{2}}\times 4^{\sqrt{18}}\div 4^{\sqrt{8}}=4^{\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{8}}=4^{2\sqrt{2}}=2^{4\sqrt{2}}$

답 $2^{4\sqrt{2}}$

0033 $(4^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\times 3^{\sqrt{\frac{2}{3}}})^{\sqrt{3}}=(2^{\frac{2}{\sqrt{6}}}\times 3^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}})^{\sqrt{3}}=2^{\sqrt{2}}\times 3^{\sqrt{2}}=6^{\sqrt{2}}$

답 $6^{\sqrt{2}}$

0034 $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})=(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2=x-y$

답 $x-y$

0035 $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=(x^{\frac{1}{3}})^3+(y^{\frac{1}{3}})^3=x+y$

답 $x+y$

유형 익히기 본문 8~12쪽

0036 ㄱ. 27의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$이다. (거짓)

ㄴ. $\sqrt{4}=2$의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{2}$이다. (거짓)

ㄷ. 16의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm\sqrt[4]{2^4}=\pm 2$이다. (참)

ㄹ. $\sqrt{81}=9$의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=9$이므로 $x^4-9=0$, $(x^2+3)(x^2-3)=0$

$x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$의 4개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

0037 -64의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$의 1개이므로 $a=1$

5의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[4]{5}$의 2개이므로 $b=2$

$\therefore ab=2$

답 2

0038 ① 25의 제곱근을 x라 하면 $x^2=25$에서

$x^2-25=0$, $(x+5)(x-5)=0$ $\therefore x=\pm 5$

② 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$에서

$x^4-81=0$, $(x^2+9)(x^2-9)=0$

$(x^2+9)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=\pm 3i$ 또는 $x=\pm 3$

이때 81의 네제곱근 중 실수인 것은 -3, 3이다.

③ 제곱근 9는 $\sqrt{9}=3$이다.

④ -1의 제곱근을 x라 하면 $x^2=-1$에서 $x=\pm i$

⑤ -27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-27$에서

$x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$

이때 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0039 ① $a<0$일 때, $(\sqrt[3]{-a})^3=-a$이다.

② $(-2)^2=4$의 제곱근은 ± 2이다.

③ $\sqrt{256}=\sqrt{2^8}=2^4$이므로 $\sqrt{256}$의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=2^4$에서 $x^4-2^4=0$, $(x^2+2^2)(x^2-2^2)=0$

$(x^2+2^2)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm 2$

④ n이 짝수이고 $a>0$일 때, $x^n=a$를 만족시키는 실수 x의 값은 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$의 2개이다.

⑤ n이 홀수일 때, -3의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-3}=-\sqrt[n]{3}$이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0040 ① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

② $\sqrt[3]{2\times\sqrt[3]{64}}=\sqrt[3]{2\times\sqrt[3]{2^6}}=\sqrt[3]{2\times 2^2}=\sqrt[3]{2^3}=2$

③ $\frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{(-3)^3}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$

④ $\left(\sqrt[3]{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^6=(\sqrt[3]{5})^6\times\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^6=5^2\times\frac{1}{5^3}=\frac{1}{5}$

⑤ $\sqrt{2\times\sqrt[3]{4}}\div\sqrt[3]{4\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3\times 4}}\div\sqrt[3]{\sqrt{4^2\times 2}}=\sqrt[6]{2^5}\div\sqrt[6]{2^5}=1$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0041 (1) $a=\sqrt{32}\div\sqrt[4]{4}=\sqrt{32}\div\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{32}\div\sqrt{2}=\sqrt{16}=4$

$b=\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{4}{2}=2$

(2) $\sqrt[12]{2a^5b^4}\times\sqrt[4]{2ab^2}\div\sqrt[6]{4a^3b}=\frac{\sqrt[12]{2a^5b^4}\times\sqrt[12]{2^3a^3b^6}}{\sqrt[12]{4^2a^6b^2}}$

$=\sqrt[12]{\frac{16a^8b^{10}}{16a^6b^2}}=\sqrt[12]{a^2b^8}=\sqrt[6]{ab^4}$

답 (1) 2 (2) $\sqrt[6]{ab^4}$

0042 $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2^5}}{\sqrt[3]{3}}}\times\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[n]{2^9}}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt{2^5}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}}\times\frac{\sqrt[6]{\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{\sqrt[n]{2^9}}}=\frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[12]{3}}\times\frac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[6n]{2^9}}$

$=\frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[6n]{2^9}}$

$\frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[6n]{2^9}}=\sqrt[8]{4}=\sqrt[8]{2^2}$에서 $\sqrt[6n]{2^9}=\frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[8]{2^2}}=\sqrt[8]{2^3}=\sqrt[24]{2^9}$

따라서 $6n=24$이므로 $n=4$

답 **4**

0043 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[5]{a}}}\div\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a}}}\times\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}}\times\frac{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}\times\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}}$

$=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[15]{a}}\times\frac{\sqrt[20]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[20]{a}}=1$

답 **1**

0044 $A=\sqrt{\sqrt{5}}=\sqrt[4]{5}$, $B=\sqrt[3]{3}$, $C=\sqrt{\sqrt[3]{10}}=\sqrt[6]{10}$에서

4, 3, 6의 최소공배수가 12이므로

$A=\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$

$B=\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$

$C=\sqrt[6]{10}=\sqrt[12]{10^2}=\sqrt[12]{100}$

따라서 $\sqrt[12]{81}<\sqrt[12]{100}<\sqrt[12]{125}$이므로

$B<C<A$

답 ④

0045 $A=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $B=\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{17}}}=\sqrt[6]{\frac{1}{17}}$에서

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$A=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[12]{\left(\frac{1}{4}\right)^4}=\sqrt[12]{\frac{1}{256}}$

$B=\sqrt[4]{\frac{1}{6}}=\sqrt[12]{\left(\frac{1}{6}\right)^3}=\sqrt[12]{\frac{1}{216}}$

$C=\sqrt[6]{\frac{1}{17}}=\sqrt[12]{\left(\frac{1}{17}\right)^2}=\sqrt[12]{\frac{1}{289}}$

따라서 $\sqrt[12]{\frac{1}{289}}<\sqrt[12]{\frac{1}{256}}<\sqrt[12]{\frac{1}{216}}$이므로

$C<A<B$

답 ⑤

0046 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{\sqrt{7}}=\sqrt[6]{7}$에서 2, 3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}$

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$

$\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$

$\sqrt[6]{7}=\sqrt[12]{7^2}=\sqrt[12]{49}$

..... ㉮

$\therefore \sqrt[12]{49}<\sqrt[12]{64}<\sqrt[12]{81}<\sqrt[12]{125}$

따라서 가장 큰 수는 $\sqrt[12]{125}$, 가장 작은 수는 $\sqrt[12]{49}$이므로

$a=\sqrt[12]{125}$, $b=\sqrt[12]{49}$

..... ㉯

$\therefore a^{12}+b^{12}=125+49=174$

..... ㉰

답 **174**

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 네 수를 같은 거듭제곱근으로 나타내기	50 %
㉯	a, b의 값 구하기	30 %
㉰	$a^{12}+b^{12}$의 값 구하기	20 %

0047 $A=\sqrt{2\times\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3\times\sqrt[3]{3}}}=\sqrt{\sqrt[3]{24}}=\sqrt[6]{24}$

$B=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^2\times\sqrt{2}}}=\sqrt[3]{\sqrt{18}}=\sqrt[6]{18}$

$C=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2\times\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{\sqrt{12}}=\sqrt[6]{12}$

따라서 $\sqrt[6]{12}<\sqrt[6]{18}<\sqrt[6]{24}$이므로

$C<B<A$

답 ⑤

0048 $\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left\{\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{27}{5}\times\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=25^{\frac{1}{2}}=5$

답 **5**

0049 $a^{-8}\times(a^{-3})^{-2}\div a^{-5}=a^{-8}\times a^6\div a^{-5}$

$=a^{-8+6-(-5)}=a^3$

$\therefore k=3$

답 **3**

0050 (1) $27^0+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=1+3^3=1+27=28$

(2) $\frac{3^{-10}+3^{12}}{3^{10}+3^{-12}}=\frac{\frac{1}{3^{10}}+3^{12}}{3^{10}+\frac{1}{3^{12}}}=\frac{\frac{3^{22}+1}{3^{10}}}{\frac{3^{22}+1}{3^{12}}}=\frac{3^{12}(3^{22}+1)}{3^{10}(3^{22}+1)}=\frac{3^{12}}{3^{10}}$

$=3^2=9$

답 (1) **28** (2) **9**

0051 ㄱ. $2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ (참)

ㄴ. $(9^{-2})^{\frac{1}{4}}=(3^{-4})^{\frac{1}{4}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$ (참)

ㄷ. $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$ (거짓)

ㄹ. $(\sqrt{2})^{2\sqrt{2}}=\{(\sqrt{2})^2\}^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0052 (주어진 식)$=a^8\div a^{2\sqrt{3}}\div(a^{3-\sqrt{3}})^2=a^{8-2\sqrt{3}}\div a^{6-2\sqrt{3}}$

$=a^{8-2\sqrt{3}-6+2\sqrt{3}}=a^2=a^k$

$\therefore k=2$

답 **2**

0053 $(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\times(a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{3}{4}})^{-1}$

$=a^{-\frac{1}{6}}\times b^{\frac{1}{4}}\times a^{-\frac{4}{3}}\times b^{\frac{3}{4}}$

$=a^{-\frac{1}{6}-\frac{4}{3}}\times b^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=a^{-\frac{3}{2}}b$

$=\dfrac{b}{a\sqrt{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a^2}$

답 ②

0054 $18^{\frac{3}{2}}\times24^{\frac{2}{3}}\div9^{-\frac{3}{4}}=(2\times3^2)^{\frac{3}{2}}\times(2^3\times3)^{\frac{2}{3}}\div(3^2)^{-\frac{3}{4}}$

$=2^{\frac{3}{2}}\times3^3\times2^2\times3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{3}{2}}$

$=2^{\frac{3}{2}+2}\times3^{3+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}$

$=2^{\frac{7}{2}}\times3^{\frac{31}{6}}$

$\therefore x=\dfrac{7}{2},\ y=\dfrac{31}{6}$

$\therefore x+y=\dfrac{26}{3}$

답 $\dfrac{26}{3}$

0055 $\left(\dfrac{1}{2^{12}}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-12})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{12}{n}}$

..... ㉮

$2^{-\frac{12}{n}}$이 정수이려면 $-\dfrac{12}{n}$가 음이 아닌 정수이어야 하므로

..... ㉯

정수 n은 -1, -2, -3, -4, -6, -12의 6개이다.

..... ㉰

답 6

단계	채점요소	배점
㉮	$\left(\dfrac{1}{2^{12}}\right)^{\frac{1}{n}}$을 지수법칙을 이용하여 간단히 하기	30 %
㉯	$\left(\dfrac{1}{2^{12}}\right)^{\frac{1}{n}}$이 정수가 되도록 하는 n의 조건 구하기	40 %
㉰	정수 n의 개수 구하기	30 %

0056 $\sqrt{\sqrt[4]{a}\times\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}=\sqrt[8]{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt{a}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$

$=\sqrt[8]{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a}$

$=a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}$

$=a^{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=a^1=a$

답 ④

0057 $P=\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{13}{12}}$

$Q=a\sqrt{a\sqrt{a^k}}=a\times\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt{a^k}}=a^1\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{k}{4}}=a^{1+\frac{1}{2}+\frac{k}{4}}=a^{\frac{6+k}{4}}$

$P=\sqrt{Q}$에서

$a^{\frac{13}{12}}=\sqrt{a^{\frac{6+k}{4}}},\ a^{\frac{13}{12}}=a^{\frac{6+k}{8}}$

$\dfrac{13}{12}=\dfrac{6+k}{8}\qquad\therefore k=\dfrac{8}{3}$

답 $\dfrac{8}{3}$

0058 (1) $\sqrt{a^2\times\sqrt{a\times\sqrt[3]{a^4}}}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{\sqrt{a}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}}$

$=\sqrt{a^2}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a^4}$

$=a\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{3}}$

$=a^{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{19}{12}}$

$\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{a^n}}{\sqrt{a^5}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^n}}}{\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}}=\dfrac{\sqrt[12]{a^n}}{\sqrt[6]{a^5}}=\dfrac{a^{\frac{n}{12}}}{a^{\frac{5}{6}}}=a^{\frac{n}{12}-\frac{5}{6}}=a^{\frac{n-10}{12}}$

따라서 $a^{\frac{19}{12}}=a^{\frac{n-10}{12}}$이므로

$19=n-10\qquad\therefore n=29$

(2) $\sqrt[n]{27\times\sqrt[3]{9\times\sqrt[4]{3}}}=\sqrt[n]{27}\times\sqrt[n]{\sqrt[3]{9}}\times\sqrt[n]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}}$

$=\sqrt[n]{3^3}\times\sqrt[3n]{3^2}\times\sqrt[12n]{3}$

$=3^{\frac{3}{n}}\times3^{\frac{2}{3n}}\times3^{\frac{1}{12n}}$

$=3^{\frac{3}{n}+\frac{2}{3n}+\frac{1}{12n}}$

$=3^{\frac{45}{12n}}=3^{\frac{15}{4n}}$

$\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$이므로 $\dfrac{15}{4n}=\dfrac{3}{4}\qquad\therefore n=5$

답 (1) **29** (2) **5**

0059 $A=\sqrt[3]{4\sqrt{4}\times\dfrac{4}{\sqrt[4]{4}}}=\left(4\sqrt{4}\times\dfrac{4}{\sqrt[4]{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=(4^{1+\frac{1}{2}}\times4^{1-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}=(4^{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$=(4^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{3}{4}}=(2^2)^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$

따라서 A^n, 즉 $(2^{\frac{3}{2}})^n$이 정수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 2이다. 답 **2**

0060 $5^8=a$, $8^6=b$에서 $5=a^{\frac{1}{8}}$, $8=b^{\frac{1}{6}}$이므로

$200^{10}=(5^2\times8)^{10}=\{(a^{\frac{1}{8}})^2\times b^{\frac{1}{6}}\}^{10}=a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{3}}$

답 ④

0061 $a=\sqrt[3]{2}$, $b=\sqrt[4]{3}$에서 $a^3=2$, $b^4=3$이므로

$\sqrt[12]{6^7}=\sqrt[12]{(2\times3)^7}=\sqrt[12]{(a^3b^4)^7}=(a^3b^4)^{\frac{7}{12}}=a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{7}{3}}$

답 ①

0062 $a=25^2=5^4$에서 $a^{\frac{1}{4}}=5$이므로

$125^3=(5^3)^3=5^9=(a^{\frac{1}{4}})^9=a^{\frac{9}{4}}=a^k$

$\therefore k=\dfrac{9}{4}$

답 $\dfrac{9}{4}$

0063 $a^4=2$, $b^{10}=8$에서 $a=2^{\frac{1}{4}}$, $b=8^{\frac{1}{10}}$이므로

$(\sqrt[6]{a^2b^5})^k=(a^2b^5)^{\frac{k}{6}}=\{(2^{\frac{1}{4}})^2\times(8^{\frac{1}{10}})^5\}^{\frac{k}{6}}$

$=(2^{\frac{1}{2}}\times8^{\frac{1}{2}})^{\frac{k}{6}}$

$=(2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{3}{2}})^{\frac{k}{6}}$

$=(2^2)^{\frac{k}{6}}=2^{\frac{k}{3}}$

따라서 $(\sqrt[6]{a^2b^5})^k$, 즉 $2^{\frac{k}{3}}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 k는 3의 배수이므로 k의 최솟값은 3이다.

답 **3**

0064 $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a+b)$
$=\{(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2\}(a+b)$
$=(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

답 a^2-b^2

0065 $\{2^{\sqrt{2}}+(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\}\{2^{\sqrt{2}}-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\}$
$=(2^{\sqrt{2}})^2-\{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\}^2=2^{2\sqrt{2}}-\{(\sqrt{2})^2\}^{\sqrt{2}}$
$=2^{\sqrt{2}+\sqrt{2}}-2^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}\times 2^{\sqrt{2}}-2^{\sqrt{2}}$
$=2^{\sqrt{2}}(2^{\sqrt{2}}-1)$

답 ①

0066 $(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})^3+(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})^3$
$=\{(x^{\frac{1}{3}})^3+3(x^{\frac{1}{3}})^2x^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}(x^{-\frac{2}{3}})^2+(x^{-\frac{2}{3}})^3\}$
$\quad+\{(x^{\frac{1}{3}})^3-3(x^{\frac{1}{3}})^2x^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}(x^{-\frac{2}{3}})^2-(x^{-\frac{2}{3}})^3\}$
$=2(x+3x^{-1})$
위의 식에 $x=2$를 대입하면
$2\left(2+\frac{3}{2}\right)=4+3=7$

답 **7**

0067 ㄱ. $(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})=(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2$
$=a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$
$=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (참)

ㄴ. $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}+1)(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}-1)=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-1^2$
$=a+2+a^{-1}-1$
$=a+\frac{1}{a}+1$ (참)

ㄷ. $(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)=(\sqrt[3]{2})^3+1^3=3$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0068 $a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{5}$의 양변을 세제곱하면
$a+a^{-1}+3(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})=(\sqrt{5})^3$
$\therefore a+a^{-1}=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

답 ⑤

0069 $5^x+5^{1-x}=8$의 양변을 제곱하면
$5^{2x}+2\cdot 5^x\cdot 5^{1-x}+5^{2(1-x)}=64$
$(5^2)^x+2\cdot 5^{x+(1-x)}+(5^2)^{1-x}=64$
$25^x+10+25^{1-x}=64$
$\therefore 25^x+25^{1-x}=54$

답 **54**

0070 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}+2$에서 $9=x+\frac{1}{x}+2$
$\therefore x+\frac{1}{x}=7$ ㉮

또 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$에서 $49=x^2+\frac{1}{x^2}+2$
$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=47$ ㉯

$\therefore \frac{x^2+x^{-2}+7}{x+x^{-1}+2}=\frac{47+7}{7+2}=6$ ㉰

답 **6**

단계	채점요소	배점
㉮	$x+\frac{1}{x}$의 값 구하기	40 %
㉯	$x^2+\frac{1}{x^2}$의 값 구하기	40 %
㉰	주어진 식의 값 구하기	20 %

0071 (1) $5^{\frac{a}{2}}+5^{-\frac{a}{2}}=\sqrt{10}$의 양변을 제곱하면
$5^a+2+5^{-a}=10$ $\quad\therefore 5^a+5^{-a}=8$
$\therefore \frac{5^{3a}-5^{2a}+5^a}{5^{2a}}=5^a-1+\frac{1}{5^a}=5^a+5^{-a}-1$
$=8-1=7$

(2) $x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면
$x^3=3-\frac{1}{3}-3(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})$
$x^3=\frac{8}{3}-3x$, $3x^3=8-9x$
$\therefore 3x^3+9x-8=0$
$\therefore 3x^4+3x^3+9x^2+x=x(3x^3+9x-8)+3x^3+9x$
$=8$

답 (1) **7** (2) **8**

0072 $a^{2x}=10$이므로
$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면
$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{10-1}{10+1}=\frac{9}{11}$

답 $\frac{9}{11}$

0073 $\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=3$
$a^{2x}+1=3(a^{2x}-1)$
$2a^{2x}=4$ $\quad\therefore a^{2x}=2$

답 **2**

0074

$\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^x(3^x-3^{-x})}{3^x(3^x+3^{-x})}=\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}=\frac{9^x-1}{9^x+1}=\frac{1}{3}$

$3\cdot 9^x-3=9^x+1$

$2\cdot 9^x=4 \quad \therefore 9^x=2$

$\therefore 9^x-9^{-x}=9^x-(9^x)^{-1}=2-2^{-1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

답 ④

0075 $\frac{2^{6x}-2^{-6x}}{2^{2x}+2^{-2x}}=\frac{2^{2x}(2^{6x}-2^{-6x})}{2^{2x}(2^{2x}+2^{-2x})}$

$=\frac{2^{8x}-2^{-4x}}{2^{4x}+1}=\frac{(2^{4x})^2-(2^{4x})^{-1}}{2^{4x}+1}$

$=\frac{9-\frac{1}{3}}{3+1}=\frac{13}{6}$

답 $\frac{13}{6}$

유형 up

본문 13쪽

0076 $a^x=16=2^4$에서 $a=2^{\frac{4}{x}}$

$b^y=16=2^4$에서 $b=2^{\frac{4}{y}}$

$\therefore ab=2^{\frac{4}{x}}\cdot 2^{\frac{4}{y}}=2^{\frac{4}{x}+\frac{4}{y}}=2^{4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2^3$

따라서 $4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=3$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

0077 $2^x=a$에서 $2=a^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$3^y=a$에서 $3=a^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$5^z=a$에서 $5=a^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$30=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

그런데 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$이므로

$a^2=30 \quad \therefore a=\sqrt{30}\ (\because a>0)$

답 $\sqrt{30}$

0078 (1) $8^x=9^y=12^z=k\ (k>0)$라 하면 $xyz\neq 0$에서 $k\neq 1$

$8^x=2^{3x}=k$에서 $2^3=k^{\frac{1}{x}}$

$9^y=3^{2y}=k$에서 $3^2=k^{\frac{1}{y}}$

$12^z=(2^2\cdot 3)^z=k$에서 $2^2\cdot 3=k^{\frac{1}{z}}$

이때 $\frac{a}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$이므로 $k^{\frac{a}{x}}\cdot k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}$

즉 $(k^{\frac{1}{x}})^a\cdot k^{\frac{1}{y}}=(k^{\frac{1}{z}})^2$에서

$(2^3)^a\cdot 3^2=(2^2\cdot 3)^2,\ 2^{3a}\cdot 3^2=2^4\cdot 3^2$

따라서 $3a=4$이므로 $a=\frac{4}{3}$

(2) $4^x=5^y=10^z=k\ (k>0)$라 하면 $xyz\neq 0$에서 $k\neq 1$

$4^x=k$에서 $2^{2x}=k \quad \therefore 2=k^{\frac{1}{2x}}$ …… ㉠

$5^y=k$에서 $5=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$10^z=k$에서 $10=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$2\times 5\div 10=k^{\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}} \quad \therefore k^{\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$

그런데 $k\neq 1$이므로 $\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$

답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) **0**

0079 $xy\neq 0$이므로 $x+y-2xy=0$의 양변을 xy로 나누면

$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}-2=0 \quad \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$ …… ㉠

$2^{2x}=4^x=k$에서 $4=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉡

$3^{2y}=9^y=k$에서 $9=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉢

㉡×㉢을 하면 $36=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

㉠에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$이므로

$k^2=36 \quad \therefore k=6\ (\because k>0)$

답 **6**

0080 1회 확대 복사할 때마다 글자 크기가 r배 커진다고 하면 5회째의 복사본의 글자 크기는 처음 원본의 글자 크기의 2배이므로

$r^5=2 \quad \therefore r=2^{\frac{1}{5}}$

8회째의 복사본의 글자 크기는 4회째의 복사본의 글자 크기의 r^4배이므로

$r^4=(2^{\frac{1}{5}})^4=2^{\frac{4}{5}}$

따라서 $m=5,\ n=4$이므로

$m+n=9$

답 **9**

0081 도시의 인구가 매년 일정한 비율로 증가하므로 1년마다 인구 수가 r배가 된다고 하면

1995년 말부터 2015년 말까지 20년 동안 인구는

$r^{20}=6760000\div 40000=169$(배)

1995년 말부터 2005년 말까지 10년 동안 인구는

$r^{10}=(r^{20})^{\frac{1}{2}}=169^{\frac{1}{2}}=13$(배)

따라서 2005년 말의 인구는

$40000\times 13=520000$(명)$=52$(만 명)

답 **52만 명**

0082 t년 후에 반감기가 300년인 방사능 물질의 양 m이 $\frac{m}{16}$이 된다고 하면

$\frac{m}{16}=m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{300}}$, $\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{300}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{300}}$

$4=\frac{t}{300}$ $\therefore t=1200$

따라서 1200년 후이다.

답 **1200년 후**

시험에 꼭 나오는 문제 본문 14~17쪽

0083 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-27}=-3$의 1개이므로 $a=1$

10의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[4]{10}$의 2개이므로 $b=2$

$\therefore a+b=3$

답 ②

0084 ㄱ. n이 홀수이면 $x^n=a$ $(a<0)$를 만족시키는 실수 x는 $\sqrt[n]{a}$의 1개이다. (참)

ㄴ. n이 짝수이면 3의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$, $-\sqrt[n]{3}$의 2개이다. (참)

ㄷ. (반례) $n=2$, $a=2$일 때, $\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$이므로 $\sqrt{-2}\neq-\sqrt{2}$이다. (거짓)

ㄹ. 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0$, $(x^2+9)(x^2-9)=0$

$\therefore x=\pm3i$ 또는 $x=\pm3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0085 $\sqrt[3]{-27}+\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{\frac{48}{3}}+\sqrt[6]{64}$

$=\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{2^4}+\sqrt[6]{2^6}$

$=-3+2+2=1$

답 ③

0086 $(\sqrt[6]{9}-\sqrt[3]{24}-2\times\sqrt[9]{-27})^6$

$=(\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{2^3\times3}-2\times\sqrt[9]{(-3)^3})^6$

$=(\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3})^6=(\sqrt[3]{3})^6$

$=3^2=9$

답 ②

0087 $\sqrt[6]{8a^3b^3}\times\sqrt[16]{256a^6b^4}\div\sqrt{4ab}$

$=\sqrt[6]{2^3a^3b^3}\times\sqrt[16]{2^8a^6b^4}\div\sqrt{2^2ab}$

$=\sqrt{2ab}\times\sqrt[8]{2^4a^3b^2}\div\sqrt{2^2ab}$

$=\frac{\sqrt[8]{2^4a^4b^4}\times\sqrt[8]{2^4a^3b^2}}{\sqrt[8]{2^8a^4b^4}}$

$=\sqrt[8]{\frac{2^8a^7b^6}{2^8a^4b^4}}$

$=\sqrt[8]{a^3b^2}$

답 ③

다른풀이 거듭제곱근을 유리수인 지수로 바꾸어 계산할 수도 있다.

$\sqrt[6]{8a^3b^3}\times\sqrt[16]{256a^6b^4}\div\sqrt{4ab}$

$=8^{\frac{1}{6}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\times256^{\frac{1}{16}}a^{\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{4}}\div4^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{4}}\div2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}\times a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}$

$=2^0\times a^{\frac{3}{8}}\times b^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{4}}$

$=a^{\frac{3}{8}}b^{\frac{2}{8}}=\sqrt[8]{a^3b^2}$

0088 $\sqrt[x]{2}\times\sqrt[y]{4}=\sqrt[xy]{2^y}\times\sqrt[xy]{4^x}=\sqrt[xy]{2^y\cdot4^x}=\sqrt[18]{2^{2x+y}}$ $(\because xy=18)$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+y\geq2\sqrt{2xy}$

$=2\sqrt{36}=12$ (단, 등호는 $2x=y$일 때 성립)

$\therefore \sqrt[x]{2}\times\sqrt[y]{4}=\sqrt[18]{2^{2x+y}}$

$\geq\sqrt[18]{2^{12}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$

답 ③

0089 $A=\sqrt[3]{2\sqrt{4}}=\sqrt[3]{\sqrt{4}\times\sqrt{4}}=\sqrt[3]{\sqrt{16}}=\sqrt[6]{16}$

$B=\sqrt{2\times\sqrt[3]{4}}=\sqrt{\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{4}}=\sqrt{\sqrt[3]{32}}=\sqrt[6]{32}$

$C=\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{9}\times\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{27}}=\sqrt[6]{27}$

따라서 $\sqrt[6]{16}<\sqrt[6]{27}<\sqrt[6]{32}$이므로

$A<C<B$

답 ②

0090 ① $\sqrt{\sqrt[3]{5\times6}}=\sqrt[6]{30}$

② $\sqrt{6\times\sqrt[3]{5}}=\sqrt{\sqrt[3]{6^3\times5}}=\sqrt{\sqrt[3]{1080}}=\sqrt[6]{1080}$

③ $\sqrt{5\times\sqrt[3]{6}}=\sqrt{\sqrt[3]{5^3\times6}}=\sqrt{\sqrt[3]{750}}=\sqrt[6]{750}$

④ $\sqrt[3]{5\sqrt{6}}=\sqrt[3]{\sqrt{5^2\times6}}=\sqrt[3]{\sqrt{150}}=\sqrt[6]{150}$

⑤ $\sqrt[3]{6\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{6^2\times5}}=\sqrt[3]{\sqrt{180}}=\sqrt[6]{180}$

따라서 가장 큰 수는 ②이다.

답 ②

0091 $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4}{n}}=(3^{-3})^{\frac{4}{n}}=3^{-\frac{12}{n}}$

$16^{-\frac{1}{n}}=(2^4)^{-\frac{1}{n}}=2^{-\frac{4}{n}}$

$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4}{n}}$과 $16^{-\frac{1}{n}}$이 모두 자연수가 되려면 $n<0$이고 $|n|$이 12와 4의 공약수이어야 하므로 n의 값은 -1, -2, -4

따라서 구하는 합은 $-1-2-4=-7$

답 -7

0092 $(\sqrt[3]{5^5})^{\frac{1}{4}}=(5^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{5}{12}}$

따라서 $(\sqrt[3]{5^5})^{\frac{1}{4}}$, 즉 $5^{\frac{5}{12}}$이 어떤 자연수 x의 n제곱근이면

$x=(5^{\frac{5}{12}})^n=5^{\frac{5}{12}n}$이므로 $5^{\frac{5}{12}n}$은 자연수이다.

즉 자연수 n $(n\geq 2)$은 12의 배수이므로 두 자리 자연수 n은 12, 24, 36, …, 96의 8개이다.

답 8

0093 (1) $\sqrt[3]{a^5}=\sqrt[4]{a\times\sqrt[3]{a^k}}$에서 $a^{\frac{5}{3}}=a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{k}{12}}=a^{\frac{1}{4}+\frac{k}{12}}$이므로

$\frac{5}{3}=\frac{1}{4}+\frac{k}{12}$, $20=3+k$

$\therefore k=17$

(2) $\sqrt{2\times\sqrt[3]{2\times\sqrt[4]{2}}}=\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}=\sqrt{2}\times\sqrt[6]{2}\times\sqrt[24]{2}$

$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}}=2^{\frac{17}{24}}$

$\therefore n=17$

답 (1) **17** (2) **17**

0094 $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$에서 $a^2=2$, $b^3=3$이므로

$\sqrt[12]{12}=\sqrt[12]{2^2\cdot 3}=\sqrt[12]{a^4b^3}$

$=(a^4b^3)^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}$

답 ①

0095 $2^a=c$에서 $(2^a)^{-1}=c^{-1}$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{1}{c}$

$2^b=d$에서 $(2^{-1})^{-b}=d$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-b}=d$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2b}=d^2$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{a-2b}=\left(\frac{1}{2}\right)^a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2b}$

$=\frac{1}{c}\cdot d^2=\frac{d^2}{c}$

답 ②

0096 $(1+3^2)(1+3)(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{8}})(1-3^{\frac{1}{8}})$

$=(1+3^2)(1+3)(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{4}})(1-3^{\frac{1}{4}})$

$=(1+3^2)(1+3)(1+3^{\frac{1}{2}})(1-3^{\frac{1}{2}})$

$=(1+3^2)(1+3)(1-3)$

$=(1+3^2)(1-3^2)$

$=1-3^4=1-81=-80$

답 -80

0097 $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=4$에서 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=4$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^{\frac{2}{3}}+2+x^{-\frac{2}{3}}=16$

$\therefore x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}=14$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^{\frac{4}{3}}+2+x^{-\frac{4}{3}}=196$

$\therefore x^{\frac{4}{3}}+x^{-\frac{4}{3}}=194$

$\therefore \sqrt[3]{x^4}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=x^{\frac{4}{3}}+x^{-\frac{4}{3}}=194$

답 **194**

0098 $x=3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$x^3=3+3^{-1}+3(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})$

$x^3=3+\frac{1}{3}+3x$, $3x^3=9+1+9x$

$\therefore 3x^3-9x-10=0$

$\therefore 3x^3-9x-8=(3x^3-9x-10)+2=0+2=2$

답 **2**

0099 $2^x+2^{-x}=4$의 양변을 제곱하면

$4^x+2+4^{-x}=16$

$\therefore 4^x+4^{-x}=14$

$2^x+2^{-x}=4$의 양변을 세제곱하면

$8^x+8^{-x}+3(2^x+2^{-x})=64$

$8^x+8^{-x}+3\cdot 4=64$

$\therefore 8^x+8^{-x}=52$

$\therefore \frac{8^x+8^{-x}}{4^x+4^{-x}}=\frac{52}{14}=\frac{26}{7}$

따라서 $m=7$, $n=26$이므로

$m+n=33$

답 **33**

0100 주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^{10}을 곱하면

(주어진 식) $=\frac{a^{10}(a^5+a^4+a^3+a^2+a)}{a^{10}(a^{-9}+a^{-8}+a^{-7}+a^{-6}+a^{-5})}$

$=\frac{a^{10}(a^5+a^4+a^3+a^2+a)}{a+a^2+a^3+a^4+a^5}$

$=a^{10}$

이때 $a^5=7$이므로

$a^{10}=(a^5)^2=7^2=49$

답 **49**

0101 $\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 3^x을 곱하면

$\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^x(3^x-3^{-x})}{3^x(3^x+3^{-x})}=\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}=\frac{9^x-1}{9^x+1}=k$이므로

$9^x-1=k(9^x+1)$, $9^x(1-k)=k+1$

$\therefore 9^x=\dfrac{1+k}{1-k}$

$\therefore 9^x+9^{-x}=\dfrac{1+k}{1-k}+\dfrac{1-k}{1+k}=\dfrac{(1+k)^2+(1-k)^2}{(1-k)(1+k)}$

$=\dfrac{2(1+k^2)}{1-k^2}$

답 ⑤

0102 $\dfrac{a^{5x}-a^{-5x}}{a^x-a^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^{5x}-a^{-5x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^x(a^{5x}-a^{-5x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\dfrac{a^{6x}-a^{-4x}}{a^{2x}-1}=\dfrac{(a^{2x})^3-(a^{2x})^{-2}}{a^{2x}-1}$

$=\dfrac{(\sqrt{2})^3-(\sqrt{2})^{-2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{7+3\sqrt{2}}{2}$

답 $\dfrac{7+3\sqrt{2}}{2}$

0103 $5^x=27$에서 $5^x=3^3$이므로

$5=3^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$45^y=81$에서 $45^y=3^4$이므로

$45=3^{\frac{4}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\dfrac{5}{45}=\dfrac{3^{\frac{3}{x}}}{3^{\frac{4}{y}}}$, $\dfrac{1}{9}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

이때 $\dfrac{1}{9}=3^{-2}$이므로 $\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-2$

답 -2

0104 $a^x=b^y=c^z=27$에서

$a=27^{\frac{1}{x}}$, $b=27^{\frac{1}{y}}$, $c=27^{\frac{1}{z}}$

$\therefore abc=27^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=3^{3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=9$

이때 $9=3^2$이므로

$3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=2$ $\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$

답 $\dfrac{2}{3}$

0105 $8^x=27^y=k$ $(k>0)$라 하면 $8=k^{\frac{1}{x}}$, $27=k^{\frac{1}{y}}$

$8=k^{\frac{1}{x}}$, $27=k^{\frac{1}{y}}$을 변끼리 곱하면

$8\times27=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}$, $216=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$6^3=k^3\left(\because \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3\right)$ $\therefore k=6$

$8^x=6$이므로 $(2^3)^x=6$, $(2^x)^3=6$ $\therefore 2^x=\sqrt[3]{6}$

$27^y=6$이므로 $(3^3)^y=6$, $(3^y)^3=6$ $\therefore 3^y=\sqrt[3]{6}$

$\therefore (2^x+3^y)^3=(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{6})^3=(2\times\sqrt[3]{6})^3$

$=2^3\times6=48$

답 48

0106 바이러스의 개체수가 한 시간 후 r배가 된다고 하면 바이러스 한 마리가 8시간 후에 8마리로 늘어나므로

$r^8=8$

$\therefore r^{16}=(r^8)^2=8^2=64$

따라서 바이러스 한 마리가 16시간 후에 64마리로 늘어난다.

답 64마리

0107 $\sqrt{\sqrt{a}\times\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}}=(a^{\frac{1}{2}}\times a\times a^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=(a^{\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=(a^{\frac{7}{6}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{12}}$ …… ㉮

$\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}}=\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{12}}}{a^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{4}}$ …… ㉯

따라서

$\sqrt{\sqrt{a}\times\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}}\div\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}}=a^{\frac{7}{12}}\div a^{\frac{1}{4}}$

$=a^{\frac{7}{12}-\frac{1}{4}}$

$=a^{\frac{1}{3}}$

이므로 $m=\dfrac{1}{3}$ …… ㉰

답 $\dfrac{1}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	$\sqrt{\sqrt{a}\times\frac{a}{\sqrt[3]{a}}}$ 간단히 하기	40 %
㉯	$\frac{\sqrt{\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}}$ 간단히 하기	40 %
㉰	m의 값 구하기	20 %

0108 $a^3=5$, $b^4=11$, $c^6=13$에서

$a=5^{\frac{1}{3}}$, $b=11^{\frac{1}{4}}$, $c=13^{\frac{1}{6}}$ …… ㉮

이므로 $(abc)^n=(5^{\frac{1}{3}}\times11^{\frac{1}{4}}\times13^{\frac{1}{6}})^n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n은 3, 4, 6의 공배수, 즉 12의 배수이다. …… ㉯

따라서 자연수 n의 최솟값은 12이다. …… ㉰

답 12

단계	채점요소	배점
㉮	a, b, c의 값 구하기	30 %
㉯	$(abc)^n$이 자연수가 되도록 하는 n의 조건 구하기	50 %
㉰	자연수 n의 최솟값 구하기	20 %

0109 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$x+2+x^{-1}=8$

$\therefore x+x^{-1}=6$ ..... ㉮

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$의 양변을 세제곱하면

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=16\sqrt{2}$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+6\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=10\sqrt{2}$ ..... ㉯

$\therefore \dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}}{x+x^{-1}+14}=\dfrac{10\sqrt{2}}{6+14}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ..... ㉰

답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	$x+x^{-1}$의 값 구하기	40 %
㉯	$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$의 값 구하기	40 %
㉰	$\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}}{x+x^{-1}+14}$의 값 구하기	20 %

0110 $\dfrac{a^{-3x}+a^{3x}}{a^{-x}+a^{x}}=3$의 좌변의 분모, 분자에 각각 a^{-x}을 곱하면

$\dfrac{a^{-4x}+a^{2x}}{a^{-2x}+1}=3$ ..... ㉮

이때 $a^{-2x}=t\ (t>0)$라 하면

$\dfrac{t^2+\dfrac{1}{t}}{t+1}=3$에서 $t^2+\dfrac{1}{t}=3t+3$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^3-3t^2-3t+1=0,\ (t+1)(t^2-4t+1)=0$

$\therefore t=2\pm\sqrt{3}\ (\because t>0)$ ..... ㉯

$\therefore a^{-2x}=2\pm\sqrt{3}$ ..... ㉰

답 $2\pm\sqrt{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	등식의 좌변의 분모, 분자에 각각 a^{-x}을 곱하여 정리하기	30 %
㉯	$a^{-2x}=t\ (t>0)$로 놓고 방정식을 풀기	50 %
㉰	a^{-2x}의 값 구하기	20 %

0111 이차방정식 $x^2+2kx+6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=6$

$\therefore \dfrac{\alpha^{-1}-\beta^{-1}}{\alpha^{-2}-\beta^{-2}}=\dfrac{\alpha^{-1}-\beta^{-1}}{(\alpha^{-1}+\beta^{-1})(\alpha^{-1}-\beta^{-1})}$

$=\dfrac{1}{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}}$

$=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=-\dfrac{3}{k}$

따라서 $-\dfrac{3}{k}=\dfrac{4}{25}$이므로 $k=-\dfrac{75}{4}$

답 $-\dfrac{75}{4}$

0112 $2^a=x$, $2^b=y$, $2^c=z$라 하면

$xyz=2^a2^b2^c=2^{a+b+c}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ ..... ㉠

$x+y+z=2^a+2^b+2^c=\dfrac{13}{4}$

또한 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2^{-a}+2^{-b}+2^{-c}=\dfrac{11}{2}$이므로

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}$

$=2(xy+yz+zx)\ (\because$ ㉠$)$

$=\dfrac{11}{2}$

$\therefore xy+yz+zx=\dfrac{11}{4}$

$\therefore 4^a+4^b+4^c=x^2+y^2+z^2$

$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=\left(\dfrac{13}{4}\right)^2-2\cdot\dfrac{11}{4}$

$=\dfrac{81}{16}$

답 $\dfrac{81}{16}$

0113 ㄱ. $f(10, 2018)=2$, $f(10, 2017)=1$,
$f(-10, 2017)=1$이므로
$f(10, 2018)=f(10, 2017)+f(-10, 2017)$ (참)

ㄴ. (반례) $a=0$, $n=2$이면 $f(0, 5)=1$, $f(0, 4)=1$이므로
$f(0, 5)+f(0, 4)=2\neq 3$ (거짓)

ㄷ. $f(\sqrt{3}, 4)=2$, $f(\sqrt[3]{-6}, 7)=1$, $f(-\sqrt[4]{8}, 6)=0$이므로
$4f(\sqrt{3}, 4)+3f(\sqrt[3]{-6}, 7)+2f(-\sqrt[4]{8}, 6)$
$=4\cdot 2+3\cdot 1+2\cdot 0=11$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

02 로그

교과서 문제 정복하기

본문 19쪽

0114 답 $4=\log_3 81$

0115 답 $-3=\log_{\frac{1}{3}} 27$

0116 $\log_2 x=3$에서 $x=2^3=8$

답 8

0117 $\log_{\frac{1}{3}} x=-2$에서 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$

답 9

0118 $\log_x 16=4$에서 $x^4=16$

$\therefore x=16^{\frac{1}{4}}=(2^4)^{\frac{1}{4}}=2$

답 2

0119 $\log_x 2=4$에서 $x^4=2$

$\therefore x=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$

답 $\sqrt[4]{2}$

0120 진수의 조건에서 $x+1>0$ $\therefore x>-1$

답 $x>-1$

0121 밑의 조건에서 $x-5>0$, $x-5\neq 1$

즉 $x>5$, $x\neq 6$

$\therefore 5<x<6$ 또는 $x>6$

답 $5<x<6$ 또는 $x>6$

0122 $3\log_2 4+2\log_2\sqrt{2}=3\log_2 2^2+2\log_2 2^{\frac{1}{2}}$

$=6\log_2 2+\log_2 2$

$=6+1$

$=7$

답 7

0123 $\log_3 24+3\log_3\frac{3}{2}$

$=\log_3(2^3\cdot 3)+3(\log_3 3-\log_3 2)$

$=\log_3 2^3+\log_3 3+3\log_3 3-3\log_3 2$

$=3\log_3 2+1+3-3\log_3 2$

$=4$

답 4

0124 $\log_2 18-2\log_2 6$

$=\log_2(2\cdot 3^2)-2\log_2(2\cdot 3)$

$=\log_2 2+2\log_2 3-2(\log_2 2+\log_2 3)$

$=1+2\log_2 3-2-2\log_2 3$

$=-1$

답 -1

0125 $\log_{10}12=\log_{10}(2^2\cdot 3)$

$=2\log_{10}2+\log_{10}3$

$=2a+b$

답 $2a+b$

0126 $\log_{10}\frac{4}{27}=\log_{10}\frac{2^2}{3^3}$

$=2\log_{10}2-3\log_{10}3$

$=2a-3b$

답 $2a-3b$

0127 $\log_3 16=\frac{\log_{10}16}{\log_{10}3}=\frac{\log_{10}2^4}{\log_{10}3}=\frac{4\log_{10}2}{\log_{10}3}=\frac{4a}{b}$

답 $\frac{4a}{b}$

0128 $\log_6 9=\frac{\log_{10}9}{\log_{10}6}=\frac{\log_{10}3^2}{\log_{10}(2\cdot 3)}$

$=\frac{2\log_{10}3}{\log_{10}2+\log_{10}3}=\frac{2b}{a+b}$

답 $\frac{2b}{a+b}$

0129 $\log_{27}81=\log_{3^3}3^4=\frac{4}{3}\log_3 3=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

0130 $\log_4\frac{1}{8}=\log_{2^2}2^{-3}=-\frac{3}{2}\log_2 2=-\frac{3}{2}$

답 $-\frac{3}{2}$

0131 $3^{\log_3 10}=10^{\log_3 3}=10$

답 10

0132 $\log_3 2\cdot\log_2 9=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}3^2}{\log_{10}2}=\frac{2\log_{10}3}{\log_{10}3}=2$

답 2

0133 $\log 1000=\log 10^3=3$

답 3

0134 $\log\frac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2$

답 -2

0135 $\log 0.001=\log 10^{-3}=-3$

답 -3

0136 $\log \sqrt[3]{100}=\log \sqrt[3]{10^2}=\log 10^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

0137 답 0.7101

0138 답 0.7007

0139 $\log 534=\log(5.34\times10^2)$
$=\log 5.34+\log 10^2$
$=0.7275+2$
$=2.7275$

답 2.7275

0140 $\log 0.0534=\log(5.34\times10^{-2})$
$=\log 5.34+\log 10^{-2}$
$=0.7275-2$
$=-1.2725$

답 -1.2725

0141 $\log 48.2=\log(4.82\times10)$
$=\log 4.82+\log 10$
$=0.6830+1=1.6830$
∴ 정수 부분 : 1, 소수 부분 : 0.6830

답 정수 부분 : 1, 소수 부분 : 0.6830

0142 $\log 4820=\log(4.82\times10^3)$
$=\log 4.82+\log 10^3$
$=0.6830+3=3.6830$
∴ 정수 부분 : 3, 소수 부분 : 0.6830

답 정수 부분 : 3, 소수 부분 : 0.6830

0143 $\log 0.482=\log(4.82\times10^{-1})$
$=\log 4.82+\log 10^{-1}$
$=-1+0.6830$
∴ 정수 부분 : -1, 소수 부분 : 0.6830

답 정수 부분 : -1, 소수 부분 : 0.6830

0144 $\log 0.0482=\log(4.82\times10^{-2})$
$=\log 4.82+\log 10^{-2}$
$=-2+0.6830$
∴ 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.6830

답 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.6830

0145 답 3

0146 답 -3

0147 $\log x=1.7348$에서 $\log 5.43$과 소수 부분이 같으므로 x는 5.43과 숫자의 배열이 같고, 정수 부분이 1이므로 정수 부분이 두 자리인 수이다.
∴ $x=54.3$

답 54.3

0148 $\log x=4.7348$에서 $\log 5.43$과 소수 부분이 같으므로 x는 5.43과 숫자의 배열이 같고, 정수 부분이 4이므로 정수 부분이 다섯 자리인 수이다.
∴ $x=54300$

답 54300

0149 $\log x=-0.2652=-1+0.7348$에서 $\log 5.43$과 소수 부분이 같으므로 x는 5.43과 숫자의 배열이 같고, 정수 부분이 -1이므로 소수점 아래 첫째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
∴ $x=0.543$

답 0.543

0150 $\log x=-2.2652=-3+0.7348$에서 $\log 5.43$과 소수 부분이 같으므로 x는 5.43과 숫자의 배열이 같고, 정수 부분이 -3이므로 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
∴ $x=0.00543$

답 0.00543

유형 익히기

본문 20~27쪽

0151 $\log_{\sqrt{3}} a=4$에서
$a=(\sqrt{3})^4=(3^{\frac{1}{2}})^4=3^2=9$
$\log_{\frac{1}{9}} b=-\frac{1}{2}$에서
$b=\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=(3^{-2})^{-\frac{1}{2}}=3$
∴ $ab=9\cdot3=27$

답 ②

0152 ⑤ $7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7} \iff \log_7\sqrt{7}=\frac{1}{2}$

답 ⑤

0153 $\log_7(\log_3(\log_2 x))=0$에서
$\log_3(\log_2 x)=7^0=1$, $\log_2 x=3^1=3$
$\therefore x=2^3=8$ 답 ④

0154 $x=\log_4(3-2\sqrt{2})$에서 $4^x=3-2\sqrt{2}$
$\therefore 4^x+4^{-x}=3-2\sqrt{2}+\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$
$=3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}=6$
답 ⑤

0155 밑의 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq 1$
$x>2$, $x\neq 3$ $\therefore 2<x<3$ 또는 $x>3$ …… ㉠
진수의 조건에서 $-x^2+8x-7>0$
$x^2-8x+7<0$, $(x-1)(x-7)<0$
$\therefore 1<x<7$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$2<x<3$ 또는 $3<x<7$
따라서 구하는 정수 x는 4, 5, 6의 3개이다.
답 ②

0156 진수의 조건에서
$x-1>0$, $x-2>0$ $\therefore x>2$
$\therefore |x-1|+|x-2|=(x-1)+(x-2)=2x-3$
답 ③

0157 밑의 조건에서 $a-2>0$, $a-2\neq 1$
$a>2$, $a\neq 3$ $\therefore 2<a<3$ 또는 $a>3$ …… ㉠
진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+2a>0$이어야 하므로 방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-8a<0$, $a(a-8)<0$
$\therefore 0<a<8$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$2<a<3$ 또는 $3<a<8$
따라서 정수 a의 값은 4, 5, 6, 7이므로 그 합은 22이다.
답 **22**

0158 밑의 조건에서 $|x-2|>0$, $|x-2|\neq 1$
$\therefore x\neq 2$, $x\neq 3$, $x\neq 1$ …… ㉠ ㉮
진수의 조건에서 $8+2x-x^2>0$
$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$
$\therefore -2<x<4$ …… ㉡ ㉯
㉠, ㉡에서 정수 x는 -1, 0의 2개이다. ㉰
답 **2**

단계	채점요소	배점
㉮	밑의 조건 구하기	40 %
㉯	진수의 조건 구하기	40 %
㉰	정수 x의 개수 구하기	20 %

0159 (주어진 식)$=\log_5(\sqrt[5]{2})^5+\log_5\sqrt{10}-\log_5\sqrt{8}$
$=\log_5\dfrac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}=\log_5\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}$
답 $\dfrac{1}{2}$

0160 (1) $\log_4 2=\log_{2^2}2=\dfrac{1}{2}\log_2 2=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{2}$이므로
(주어진 식)$=\log_2\sqrt{3}+\log_2\sqrt{\dfrac{8}{3}}-\log_2\sqrt{2}$
$=\log_2\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{8}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$=\log_2\sqrt{4}=\log_2 2=1$
(2) (주어진 식)
$=(\log_3\sqrt[5]{5}-\log_3 27)-\dfrac{1}{5}(\log_3 5-\log_3 9)-\dfrac{1}{5}\cdot 2$
$=(\log_3 5^{\frac{1}{5}}-3)-\dfrac{1}{5}(\log_3 5-2)-\dfrac{2}{5}$
$=\dfrac{1}{5}\log_3 5-3-\dfrac{1}{5}\log_3 5+\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{5}$
$=-3$
(3) $\log_2 32=\log_2 2^5=5$
$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{4}=\log_{2^{-1}}\dfrac{3}{4}=-\log_2\dfrac{3}{4}=-(\log_2 3-\log_2 2^2)$
$=-\log_2 3+2$
$\log_4 36=\log_{2^2}6^2=\log_2 6=\log_2(3\cdot 2)=\log_2 3+1$
$\therefore$ (주어진 식)$=\log_2(5-\log_2 3+2+\log_2 3+1)$
$=\log_2 8=\log_2 2^3$
$=3$
답 (1) **1** (2) **−3** (3) **3**

0161 $\log_5 x+2\log_5\sqrt{y}-2\log_5 z=2$에서
$\log_5 x+\log_5(\sqrt{y})^2-\log_5 z^2=2$
$\log_5 x+\log_5 y-\log_5 z^2=2$
$\log_5\dfrac{xy}{z^2}=2$ $\therefore \dfrac{xy}{z^2}=5^2=25$
답 **25**

0162 $\log_2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\log_2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\log_2\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots$
$+\log_2\left(1-\dfrac{1}{32}\right)$
$=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{31}{32}\right)$
$=\log_2\dfrac{1}{32}=\log_2 2^{-5}=-5$
답 **−5**

0163 $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 7}{\log_2 5}\cdot\dfrac{\log_2 9}{\log_2 7}$

$=\dfrac{\log_2 9}{\log_2 3}$

$=\log_3 9$

$=2$

답 **2**

0164 $\dfrac{1}{\log_2 12}+\dfrac{1}{\log_3 12}+\dfrac{1}{\log_{24} 12}$

$=\log_{12} 2+\log_{12} 3+\log_{12} 24$

$=\log_{12}(2\cdot 3\cdot 24)$

$=\log_{12} 144$

$=\log_{12} 12^2=2$

답 **2**

0165 (1) (주어진 식)

$=\log_{10} 2\cdot\log_{10} 2+\dfrac{1+\log_{10} 2}{\log_5 2+\log_5 5}$

$=\log_{10} 2\cdot\log_{10} 2+\dfrac{1+\log_{10} 2}{\log_5 10}$

$=\log_{10} 2\cdot\log_{10} 2+(1+\log_{10} 2)\cdot\log_{10} 5$

$=\log_{10} 2\cdot\log_{10} 2+\log_{10} 5+\log_{10} 2\cdot\log_{10} 5$

$=\log_{10} 2\,(\log_{10} 2+\log_{10} 5)+\log_{10} 5$

$=\log_{10} 2\cdot\log_{10} 10+\log_{10} 5$

$=\log_{10} 2+\log_{10} 5$

$=\log_{10} 10=1$

(2) (주어진 식)$=\log_2(\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9)$

$=\log_2(\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot 2\log_7 3)$

$=\log_2\left(2\cdot\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 7}{\log_2 5}\cdot\dfrac{\log_2 3}{\log_2 7}\right)$

$=\log_2 2=1$

(3) (주어진 식)$=\log_3 45-\log_3 35+\log_3 21$

$=\log_3\left(\dfrac{45}{35}\cdot 21\right)$

$=\log_3 27$

$=3$

답 (1) **1** (2) **1** (3) **3**

0166 $\log_c a=2$, $\log_b c=3$이므로

$70\log_{\sqrt{ab}} c=\dfrac{70}{\log_c\sqrt{ab}}=\dfrac{70}{\log_c(ab)^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{70}{\frac{1}{2}\log_c ab}=\dfrac{140}{\log_c a+\log_c b}$

$=\dfrac{140}{\log_c a+\frac{1}{\log_b c}}=\dfrac{140}{2+\frac{1}{3}}$

$=60$

답 **60**

0167 $4\log_9 2+\log_3 4-\log_3 8$

$=4\log_{3^2} 2+\log_3 2^2-\log_3 2^3$

$=2\log_3 2+2\log_3 2-3\log_3 2$

$=\log_3 2$

$\therefore\ 27^{4\log_9 2+\log_3 4-\log_3 8}=27^{\log_3 2}=3^{3\log_3 2}=3^{\log_3 2^3}=2^3=8$

답 8

0168 $\log_2 81+\log_4 9-\log_8 9$

$=\log_2 3^4+\log_{2^2} 3^2-\log_{2^3} 3^2$

$=4\log_2 3+\log_2 3-\dfrac{2}{3}\log_2 3$

$=\dfrac{13}{3}\log_2 3$

$\therefore\ a=\dfrac{13}{3}$

답 ②

0169 $\left(\log_3 5+\log_9\dfrac{1}{5}\right)\left(\log_5\sqrt{\dfrac{1}{3}}+\log_{25} 9\right)$

$=(\log_3 5+\log_{3^2} 5^{-1})\left\{\log_5\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\log_{5^2} 3^2\right\}$

$=\left(\log_3 5-\dfrac{1}{2}\log_3 5\right)\{\log_5(3^{-1})^{\frac{1}{2}}+\log_5 3\}$

$=\dfrac{1}{2}\log_3 5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\log_5 3+\log_5 3\right)$

$=\dfrac{1}{2}\log_3 5\cdot\dfrac{1}{2}\log_5 3=\dfrac{1}{4}$

답 $\dfrac{1}{4}$

0170 (주어진 식)$=\dfrac{(5^{\log_5 12})^2}{2^{\log_2 8\cdot\log_2 9}}=\dfrac{(12^{\log_5 5})^2}{2^{3\log_2 3\cdot 2\log_2 3}}$

$=\dfrac{12^2}{2^6}=\dfrac{144}{64}=\dfrac{9}{4}$

답 $\dfrac{9}{4}$

0171 $\log_{12}\sqrt{24}=\dfrac{\log_7\sqrt{24}}{\log_7 12}$에서

$\log_7\sqrt{24}=\dfrac{1}{2}\log_7 24=\dfrac{1}{2}\log_7(2^3\cdot 3)$

$=\dfrac{1}{2}(3\log_7 2+\log_7 3)$

$=\dfrac{1}{2}(3a+b)$

$\log_7 12=\log_7(2^2\cdot 3)=2\log_7 2+\log_7 3=2a+b$

$\therefore\ \log_{12}\sqrt{24}=\dfrac{\frac{1}{2}(3a+b)}{2a+b}=\dfrac{3a+b}{2(2a+b)}$

답 ②

0172 $10^a=x$에서 $a=\log_{10} x$

$10^b=y$에서 $b=\log_{10} y$

$10^c=z$에서 $c=\log_{10} z$

$$\therefore \log_{10}\frac{x^2z^4}{y^3}=\log_{10}x^2+\log_{10}z^4-\log_{10}y^3$$
$$=2\log_{10}x+4\log_{10}z-3\log_{10}y$$
$$=2a-3b+4c$$

답 $2a-3b+4c$

0173 $\log_5 3=b$에서
$$\frac{\log_2 3}{\log_2 5}=\frac{\log_2 3}{a}=b \qquad \therefore \log_2 3=ab$$
$$\therefore \log_6 45=\frac{\log_2 45}{\log_2 6}=\frac{\log_2(3^2\cdot 5)}{\log_2(2\cdot 3)}$$
$$=\frac{2\log_2 3+\log_2 5}{1+\log_2 3}=\frac{2ab+a}{1+ab}$$

답 $\frac{2ab+a}{1+ab}$

0174 $\sqrt{6\sqrt{6}}=(6^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=6^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{3\sqrt{3}}=(3^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{4}}$이므로
$$\log_3\sqrt{6\sqrt{6}}-\log_6\sqrt{3\sqrt{3}}=\log_3 6^{\frac{3}{4}}-\log_6 3^{\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{3}{4}(\log_3 6-\log_6 3)$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{\log_2 6}{\log_2 3}-\frac{\log_2 3}{\log_2 6}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\left\{\frac{\log_2(2\cdot 3)}{\log_2 3}-\frac{\log_2 3}{\log_2(2\cdot 3)}\right\}$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1+\log_2 3}{\log_2 3}-\frac{\log_2 3}{1+\log_2 3}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1+a}{a}-\frac{a}{1+a}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{(1+a)^2-a^2}{a(a+1)}$$
$$=\frac{3(2a+1)}{4a(a+1)}$$

답 $\frac{3(2a+1)}{4a(a+1)}$

0175 $5^x=2^y=\sqrt{10^z}=k$ $(k>0,\ k\neq 1)$라 하면
$x=\log_5 k$에서 $\frac{1}{x}=\log_k 5$
$y=\log_2 k$에서 $\frac{1}{y}=\log_k 2$
$\frac{z}{2}=\log_{10} k$에서 $\frac{2}{z}=\log_k 10$
$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=\log_k 5+\log_k 2-\log_k 10$$
$$=\log_k\left(\frac{5\cdot 2}{10}\right)=\log_k 1=0$$

답 0

0176 $108^x=27$에서 $x=\log_{108}27=\log_{108}3^3=3\log_{108}3$
$$\therefore \frac{3}{x}=\frac{1}{\log_{108}3}=\log_3 108$$
$4^y=81$에서 $y=\log_4 81=\log_4 3^4=4\log_4 3$
$$\therefore \frac{4}{y}=\frac{1}{\log_4 3}=\log_3 4$$
$$\therefore \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=\log_3 108-\log_3 4$$
$$=\log_3\frac{108}{4}$$
$$=\log_3 27=3$$

답 3

0177 $\log_a x=1$에서 $\log_x a=1$
$\log_b x=2$에서 $\log_x b=\frac{1}{2}$
$\log_c x=3$에서 $\log_x c=\frac{1}{3}$
$$\therefore \log_{abc} x=\frac{1}{\log_x abc}=\frac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{11}{6}}=\frac{6}{11}$$

답 $\frac{6}{11}$

0178 $a^x=b^y=c^z=256=2^8$에서
$x=8\log_a 2$, $y=8\log_b 2$, $z=8\log_c 2$ ……… ㉮
$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{8\log_a 2}+\frac{1}{8\log_b 2}+\frac{1}{8\log_c 2}$$
$$=\frac{1}{8}(\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c)$$
$$=\frac{1}{8}\log_2 abc=\frac{1}{8}\log_2 16$$
$$=\frac{1}{8}\cdot 4=\frac{1}{2}$$
……… ㉯

답 $\frac{1}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	x, y, z를 로그로 나타내기	40 %
㉯	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$의 값 구하기	60 %

0179 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_{10} a+\log_{10} b=6$, $\log_{10} a\cdot\log_{10} b=3$
$$\therefore \log_a b+\log_b a$$
$$=\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}+\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$$
$$=\frac{(\log_{10} a)^2+(\log_{10} b)^2}{\log_{10} a\cdot\log_{10} b}$$
$$=\frac{(\log_{10} a+\log_{10} b)^2-2\log_{10} a\cdot\log_{10} b}{\log_{10} a\cdot\log_{10} b}$$
$$=\frac{6^2-2\cdot 3}{3}=\frac{30}{3}=10$$

답 ③

0180 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=10$, $\alpha\beta=8$

$\therefore \log_2 \alpha+\log_2 \beta=\log_2 \alpha\beta=\log_2 8$
$=\log_2 2^3=3$

답 **3**

0181 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2\log_2 3,\ \alpha\beta=1$
$\therefore \alpha+\beta-\alpha\beta=2\log_2 3-1$
$=\log_2 3^2-\log_2 2$
$=\log_2 \frac{9}{2}$
$\therefore 2^{\alpha+\beta-\alpha\beta}=2^{\log_2 \frac{9}{2}}=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

0182 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$1+\log_3 4=a,\ 1\cdot\log_3 4=b$
$\therefore \frac{a}{b}=\frac{1+\log_3 4}{\log_3 4}=\frac{\log_3 3+\log_3 4}{\log_3 4}$
$=\frac{\log_3 12}{\log_3 4}=\log_4 12$

답 ①

0183 $A=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}=\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3=3$
$B=5\log_4 2=5\log_{2^2} 2=\frac{5}{2}$
$C=4^{\log_4 2}=2^{\log_4 4}=2$
$\therefore C<B<A$

답 ⑤

0184 $A=3\log_2 \frac{1}{4}=3\log_2 2^{-2}=3\cdot(-2)=-6$
$B=9^{\log_3 7-2}=9^{\log_3 7}\div 9^2$
$=7^{\log_3 9}\div 9^2=7^2\div 9^2=\frac{49}{81}$
$C=\log_4 8-\log_{\frac{1}{3}} 27=\log_{2^2} 2^3-\log_{3^{-1}} 3^3$
$=\frac{3}{2}-(-3)=\frac{9}{2}$
$\therefore A<B<C$

답 ①

0185 $A=3^{1-\log_3 2}=3^{\log_3 \frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$
$B=\log_2 3\cdot\log_3 4=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}$
$=\log_2 4=2$
$C=\log_4 2+\log_9 3=\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{2}\log_3 3$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
$\therefore C<A<B$

답 $C<A<B$

0186 $\log_3 9<\log_3 20<\log_3 27$이므로
$2<\log_3 20<3$
즉 $\log_3 20$의 정수 부분 a는 $a=2$
소수 부분 b는
$b=\log_3 20-2=\log_3 20-\log_3 3^2=\log_3 \frac{20}{9}$
$\therefore 9(2^a+3^b)=9(2^2+3^{\log_3 \frac{20}{9}})=9\left(4+\frac{20}{9}\right)=56$

답 **56**

0187 $\log_5 10=\log_5(5\cdot 2)=1+\log_5 2$ …… ㉠
이때 $\log_5 1<\log_5 2<\log_5 5$이므로
$0<\log_5 2<1$
즉 ㉠에서 $\log_5 10$의 정수 부분 x는 $x=1$
소수 부분 y는
$y=\log_5 10-1=1+\log_5 2-1=\log_5 2$
$\therefore \frac{5^y-5^{-y}}{5^x-5^{-x}}=\frac{5^{\log_5 2}-5^{-\log_5 2}}{5^1-5^{-1}}=\frac{2-\frac{1}{2}}{5-\frac{1}{5}}=\frac{5}{16}$

답 $\frac{5}{16}$

0188 $\log 72=\log(2^3\cdot 3^2)=3\log 2+2\log 3$
$=3\times 0.3010+2\times 0.4771$
$=1.8572$

답 ②

0189 양수 x에 대하여 $\log\sqrt{x}=0.612$이므로
$\log x=2\log\sqrt{x}=2\times 0.612=1.224$
$\therefore \log x^4+\log\sqrt[3]{x}=4\log x+\frac{1}{3}\log x$
$=\frac{13}{3}\log x$
$=\frac{13}{3}\times 1.224$
$=5.304$

답 **5.304**

0190 $\log x=-1.3796=-2+0.6204$이므로
$\log x^2+\log\sqrt{x}=2\log x+\frac{1}{2}\log x$
$=\frac{5}{2}\log x$
$=\frac{5}{2}(-2+0.6204)$
$=-5+1.5510$
$=-4+0.5510$
따라서 정수 부분은 -4, 소수 부분은 0.5510이다.

답 ②

0191 ㄱ. $\log 654=\log(6.54\times10^2)$
$=\log 6.54+2$
$=0.8156+2=2.8156$
∴ 정수 부분 : 2, 소수 부분 : 0.8156 (참)
ㄴ. $\log 0.0654=\log(6.54\times10^{-2})$
$=-2+\log 6.54$
$=-2+0.8156$
∴ 정수 부분 : −2, 소수 부분 : 0.8156 (거짓)
ㄷ. $\log 13.08=\log(6.54\times2)$
$=\log 6.54+\log 2$
$=0.8156+0.3010$
$=1.1166$
∴ 정수 부분 : 1, 소수 부분 : 0.1166 (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ㄱ

0192 $\log x^2=2\log x=2\times(-2.54)$
$=-5.08$
$=-5-0.08$
$=(-5-1)+(1-0.08)$
$=-6+0.92$
∴ $n=-6$ ……… ㉮

$\log\frac{1}{x}=-\log x=-(-2.54)=2.54$
∴ $\alpha=0.54$ ……… ㉯

∴ $n+\alpha=-6+0.54=-5.46$ ……… ㉰

답 **−5.46**

단계	채점요소	배점
㉮	n의 값 구하기	40%
㉯	α의 값 구하기	40%
㉰	$n+\alpha$의 값 구하기	20%

0193 $10\le x<100$에서
$\log 10\le\log x<\log 100$
∴ $1\le\log x<2$
즉 $\log x$의 정수 부분은 1이다.
$\log x=1+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$라 하면
$\log\sqrt{x}=\log x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log x=\frac{1}{2}(1+\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$
그런데 $0\le\alpha<1$이므로 $\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}<1$
따라서 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분은 $\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$이다.

답 $\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$

0194 $\log A=-1.7399$
$=-1-0.7399$
$=(-1-1)+(1-0.7399)$
$=-2+0.2601$
즉 $\log A$와 $\log 1.82$의 소수 부분이 같으므로 A는 1.82와 숫자의 배열이 같고, $\log A$의 정수 부분이 −2이므로 A는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
∴ $A=0.0182$

답 **0.0182**

0195 ③ $\log 0.674=\log(67.4\times10^{-2})$
$=\log 67.4+\log 10^{-2}$
$=1.8287-2$
$=-0.1713$

답 ③

0196 $\log y=-1.5986$
$=-1-0.5986$
$=(-1-1)+(1-0.5986)$
$=-2+0.4014$
즉 $\log y$와 $\log 2.52$의 소수 부분이 같으므로 y는 2.52와 숫자의 배열이 같고, $\log y$의 정수 부분이 −2이므로 y는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
∴ $y=0.0252$
또한 $\log 2520$에서 2520은 4자리의 정수이므로 $\log 2520$의 정수 부분은 $4-1=3$이고, 2.52와 숫자의 배열이 같으므로 소수 부분은 0.4014이다. 즉
$\log 2520=3+0.4014=3.4014$
∴ $10^4(\log 2520-y)=10^4(3.4014-0.0252)$
$=33762$

답 **33762**

0197 $\log a$의 정수 부분이 3이므로
$3\le\log a<4$ ∴ $10^3\le a<10^4$
따라서 자연수 a의 개수는
$10^4-10^3=9000$

답 ⑤

0198 양수 A는 정수 부분이 4자리인 수이므로 $\log A$의 정수 부분은 3이다.
∴ $3\le\log A<4$

답 ③

0199 $\log A$의 정수 부분이 4이므로
$4\le\log A<5$ ∴ $10^4\le A<10^5$
∴ $x=10^5-10^4=9\cdot10^4$ ……… ㉮

$\log \frac{1}{B}$의 정수 부분이 -2이므로

$-2 \le \log \frac{1}{B} < -1$, $-2 \le -\log B < -1$

$1 < \log B \le 2$ $\therefore 10 < B \le 10^2$

$\therefore y = 10^2 - 10 = 9 \cdot 10$ ……… ㉯

$\therefore \log x - \log y = \log \frac{x}{y} = \log \frac{9 \cdot 10^4}{9 \cdot 10}$

$= \log 10^3 = 3$ ……… ㉰

답 3

단계	채점요소	배점
㉮	x의 값 구하기	40 %
㉯	y의 값 구하기	40 %
㉰	$\log x - \log y$의 값 구하기	20 %

0200 $A^3B = (2^{10})^3 \cdot 5^{10} = 2^{30} \cdot 5^{10}$이므로

$\log A^3B = \log(2^{30} \cdot 5^{10}) = \log(2^{20} \cdot 10^{10})$

$= 20 \log 2 + 10$

$= 20 \times 0.3010 + 10$

$= 16.02$

따라서 $\log A^3B$의 정수 부분이 16이므로 A^3B는 17자리의 정수이다.

답 ①

0201 $\log 5^{30} = 30 \log 5 = 30(1 - \log 2)$

$= 30(1 - 0.3010) = 30 \times 0.6990 = 20.97$

따라서 $\log 5^{30}$의 정수 부분이 20이므로 5^{30}은 21자리의 정수이다.

답 ②

0202 2^n이 20자리의 수가 되어야 하므로 $\log 2^n$의 정수 부분은 19이어야 한다. 즉,

$19 \le \log 2^n < 20$, $19 \le n \log 2 < 20$

$19 \le 0.3n < 20$

$\therefore 63.\times\times\times \le n < 66.\times\times\times$

따라서 이를 만족시키는 자연수 n은 64, 65, 66이고, 그 합은

$64 + 65 + 66 = 195$

답 195

0203 24^{100}이 139자리의 수이므로 $\log 24^{100}$의 정수 부분은 138이다. 즉

$138 \le \log 24^{100} < 139$, $138 \le 100 \log 24 < 139$

$\therefore 1.38 \le \log 24 < 1.39$ …… ㉠

$\log 24^{19} = 19 \log 24$이므로 ㉠의 각 변에 19를 곱하면

$1.38 \times 19 \le 19 \log 24 < 1.39 \times 19$

$\therefore 26.22 \le \log 24^{19} < 26.41$

따라서 $\log 24^{19}$의 정수 부분이 26이므로 24^{19}은 27자리의 정수이다.

답 ⑤

0204 $\log A = -3.69 = -4 + 0.31$이므로

$\log A^{20} = 20 \log A = 20(-4 + 0.31)$

$= -80 + 6.2$

$= -74 + 0.2$

따라서 $\log A^{20}$의 정수 부분이 -74이므로 A^{20}은 소수점 아래 74째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 74째 자리

0205 $\log 0.25^{20} = \log \left(\frac{1}{4}\right)^{20} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{40}$

$= \log 2^{-40} = -40 \log 2$

$= -40 \times 0.3010$

$= -12.04$

$= -13 + 0.96$

따라서 $\log 0.25^{20}$의 정수 부분이 -13이므로 0.25^{20}은 소수점 아래 13째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 13째 자리

0206 a^{10}이 14자리의 정수이므로 $\log a^{10}$의 정수 부분은 13이다. 즉 $13 \le \log a^{10} < 14$, $13 \le 10 \log a < 14$

$\therefore 1.3 \le \log a < 1.4$ …… ㉠

$\log \left(\frac{1}{a}\right)^2 = -2 \log a$이므로 ㉠의 각 변에 -2를 곱하면

$-2.8 < -2 \log a \le -2.6$

따라서 $\log \left(\frac{1}{a}\right)^2$의 정수 부분이 -3이므로 $\left(\frac{1}{a}\right)^2$은 소수점 아래 3째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 ②

0207 $\log \frac{A^3}{B^2} = 5 + \alpha$, $\log \frac{B^2}{A} = -1 + \beta$

$(0 \le \alpha < 1, 0 \le \beta < 1)$

로 놓으면

$3 \log A - 2 \log B = 5 + \alpha$ …… ㉠

$2 \log B - \log A = -1 + \beta$ …… ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $2 \log A = 4 + \alpha + \beta$

$\therefore \log A = 2 + \frac{\alpha + \beta}{2}$

이때 $0 \le \frac{\alpha + \beta}{2} < 1$이므로 $\log A$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\frac{\alpha + \beta}{2}$이다.

따라서 A는 3자리의 자연수이다.

답 3자리

0208 $\log 6^{20}=20\log 6=20(\log 2+\log 3)$
$=20(0.3010+0.4771)$
$=15.562$
이때 $\log 4=2\log 2=2\times 0.3010=0.6020$이므로
$\log 3<0.562<\log 4$
$15+\log 3<15.562<15+\log 4$
$\log(3\cdot 10^{15})<\log 6^{20}<\log(4\cdot 10^{15})$
$\therefore 3\cdot 10^{15}<6^{20}<4\cdot 10^{15}$
따라서 6^{20}의 최고 자리의 숫자는 3이다.

답 3

0209 $\log(2^{20}\cdot 3^{40})=\log 2^{20}+\log 3^{40}$
$=20\log 2+40\log 3$
$=20\times 0.3010+40\times 0.4771$
$=25.104$
이때 $\log 1=0$, $\log 2=0.3010$이므로
$\log 1<0.104<\log 2$
$25+\log 1<25.104<25+\log 2$
$\log(1\cdot 10^{25})<\log(2^{20}\cdot 3^{40})<\log(2\cdot 10^{25})$
$\therefore 1\cdot 10^{25}<2^{20}\cdot 3^{40}<2\cdot 10^{25}$
따라서 $2^{20}\cdot 3^{40}$의 최고 자리의 숫자는 1이다.

답 ①

0210 $\log 2^{50}=50\log 2=50\times 0.3010=15.05$이므로 2^{50}은 16자리의 정수이다.
$\therefore a=16$ ..... ㉮
2의 거듭제곱의 일의 자리 숫자는 2, 4, 8, 6이 반복되고,
$50=4\cdot 12+2$이므로 2^{50}의 일의 자리의 숫자는 4이다.
$\therefore b=4$ ..... ㉯
한편, $\log 2=0.3010$이므로 $\log 1<0.05<\log 2$
$15+\log 1<15.05<15+\log 2$
$\log(1\cdot 10^{15})<\log 2^{50}<\log(2\cdot 10^{15})$
$\therefore 1\cdot 10^{15}<2^{50}<2\cdot 10^{15}$
따라서 2^{50}의 최고 자리의 숫자는 1이므로 $c=1$ ..... ㉰
$\therefore a+b+c=16+4+1=21$ ..... ㉱

답 21

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	20%
㉯	b의 값 구하기	30%
㉰	c의 값 구하기	40%
㉱	$a+b+c$의 값 구하기	10%

유형 up

본문 28~29쪽

0211 $\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면
이차방정식 $2x^2-5x+k-3=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$n+\alpha=\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}$ ..... ㉠
$n\alpha=\frac{k-3}{2}$ ..... ㉡
㉠에서 $n=2$, $\alpha=\frac{1}{2}$이므로 이 값을 ㉡에 대입하면
$2\cdot\frac{1}{2}=\frac{k-3}{2}$
$\therefore k=5$

답 5

0212 $\log A=\frac{15}{2}=7+\frac{1}{2}$이므로 $\log A$의 정수 부분은 7, 소수 부분은 $\frac{1}{2}$이다.
따라서 이차항의 계수가 1이고 7과 $\frac{1}{2}$을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-\left(7+\frac{1}{2}\right)x+7\cdot\frac{1}{2}=0$
$x^2-\frac{15}{2}x+\frac{7}{2}=0$
$\therefore 2x^2-15x+7=0$

답 ①

0213 $\log z=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$n+\alpha=a$ ..... ㉠
$n\alpha=b$ ..... ㉡
이때 $b\neq 0$이므로 $\alpha\neq 0$ $\therefore 0<\alpha<1$
한편, $\log\frac{1}{z}=-\log z=-n-\alpha=(-n-1)+(1-\alpha)$
이고 $0<1-\alpha<1$이므로 $\log\frac{1}{z}$의 정수 부분은 $-n-1$이고, 소수 부분은 $1-\alpha$이다.
이차방정식 $x^2+ax+b-\frac{3}{2}=0$의 두 근이 $-n-1$, $1-\alpha$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$(-n-1)+(1-\alpha)=-a$
$(-n-1)(1-\alpha)=b-\frac{3}{2}$ ..... ㉢
㉡, ㉢에서 $-n+n\alpha-1+\alpha=n\alpha-\frac{3}{2}$이므로
$n-\alpha=\frac{1}{2}$ $\therefore n=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$ ($\because n$은 정수, $0<\alpha<1$)

이 값을 ㉠, ㉡에 대입하면 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=2$

답 2

0214 $10<x<100$에서 $1<\log x<2$ …… ㉠

$\log x$의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x-\log \frac{1}{x}=\log x+\log x=2\log x=$(정수)

㉠에 의하여 $2<2\log x<4$이므로

$2\log x=3$, $\log x=\frac{3}{2}$

$x=10^{\frac{3}{2}}$ $\therefore x^2=10^3$

답 ③

0215 $\log x$의 정수 부분이 1이므로

$1\le\log x<2$ …… ㉠

$\log x^2$의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^2-\log \frac{1}{x}=2\log x+\log x=3\log x=$(정수)

㉠에 의하여 $3\le 3\log x<6$이므로

$3\log x=3, 4, 5$

$\log x=1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$

$\therefore x=10, 10^{\frac{4}{3}}, 10^{\frac{5}{3}}$

따라서 모든 x의 값의 곱은

$10\cdot 10^{\frac{4}{3}}\cdot 10^{\frac{5}{3}}=10^{1+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}=10^4$

답 ③

0216 x의 정수 부분이 세 자리의 자연수이고, x는 정수가 아니므로 $\log x=2.\times\times\times$

즉 $2<\log x<3$ …… ㉠

$\log \sqrt{x}$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분이 같으므로

$\log \sqrt{x}-\log x^2=\frac{1}{2}\log x-2\log x$

$=-\frac{3}{2}\log x=$(정수)

㉠에 의하여 $-\frac{9}{2}<-\frac{3}{2}\log x<-3$이므로

$-\frac{3}{2}\log x=-4$

$\therefore \log x=\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$

따라서 $\log x$의 소수 부분은 $\frac{2}{3}$이다. $\therefore k=\frac{2}{3}$

$\therefore 420k=420\cdot\frac{2}{3}=280$

답 280

0217 $\log x$의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x+\log \sqrt{x}=\log x+\frac{1}{2}\log x=\frac{3}{2}\log x=$(정수)

한편, $\log x$의 정수 부분이 2이므로 $2\le\log x<3$

각 변에 $\frac{3}{2}$을 곱하면 $3\le\frac{3}{2}\log x<\frac{9}{2}$

$\frac{3}{2}\log x=3, 4$

$\therefore \log x=2, \frac{8}{3}$

그런데 $\log x=2$이면 $\log \sqrt{x}=1$이 되어 $\log x$와 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분의 합은 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore \log x=\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$

따라서 $\log x$의 소수 부분은 $\frac{2}{3}$이다.

답 ④

다른풀이 $\log x$의 소수 부분을 α라 하면

$\log x=2+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$

$\therefore \log \sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=\frac{1}{2}(2+\alpha)=1+\frac{\alpha}{2}$

따라서 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분은 $\frac{\alpha}{2}$이므로

$\alpha+\frac{\alpha}{2}=1$, $\frac{3}{2}\alpha=1$ $\therefore \alpha=\frac{2}{3}$

0218 $\log x$의 소수 부분과 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x+\log \sqrt[3]{x}=\log x+\frac{1}{3}\log x=\frac{4}{3}\log x=$(정수)

$10^3\le x<10^4$에서 $3\le\log x<4$

각 변에 $\frac{4}{3}$를 곱하면 $4\le\frac{4}{3}\log x<\frac{16}{3}$

$\frac{4}{3}\log x=4, 5$ $\therefore \log x=3, \frac{15}{4}$

그런데 $\log x=3$이면 $\log \sqrt[3]{x}=1$이 되어 $\log x$와 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합은 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore \log x=\frac{15}{4}$

따라서 $\log x^2=2\log x=\frac{15}{2}=7+\frac{1}{2}$이므로 $\log x^2$의 소수 부분은 $\frac{1}{2}$이다.

답 $\frac{1}{2}$

다른풀이 $10^3\le x<10^4$에서 $3\le\log x<4$

$\log x$의 소수 부분을 α라 하면 $\log x=3+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$

$\therefore \log \sqrt[3]{x}=\frac{1}{3}\log x=\frac{1}{3}(3+\alpha)=1+\frac{\alpha}{3}$

따라서 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분은 $\frac{\alpha}{3}$이므로

$\alpha+\frac{\alpha}{3}=1$, $\frac{4}{3}\alpha=1$ $\therefore \alpha=\frac{3}{4}$

$\therefore \log x^2=2\log x=6+2\alpha=6+\frac{3}{2}=7+\frac{1}{2}$

따라서 $\log x^2$의 소수 부분은 $\frac{1}{2}$이다.

0219 $P(x)=1$에서 $1\le\log x<2$ …… ㉠

$Q(x)+Q(x^2)=1$에서

$\log x+\log x^2=\log x+2\log x=3\log x=$(정수)

㉠의 각 변에 3을 곱하면

$3\le 3\log x<6$ $\therefore 3\log x=3, 4, 5$

즉 $\log x=1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$이므로 $x=10, 10^{\frac{4}{3}}, 10^{\frac{5}{3}}$

그런데 $x=10$이면 $\log x=1$, $\log x^2=2$가 되어

$Q(x)+Q(x^2)=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore x=10^{\frac{4}{3}}, 10^{\frac{5}{3}}$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^{\frac{4}{3}}\cdot 10^{\frac{5}{3}}=10^3$

답 ⑤

다른풀이 $P(x)=1$이므로 $\log x$의 소수 부분을 α라 하면

$\log x=1+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$

$\therefore \log x^2=2\log x=2(1+\alpha)=2+2\alpha$

(i) $0\le\alpha<\frac{1}{2}$일 때,

$0\le 2\alpha<1$에서 $\log x^2$의 소수 부분은 2α이고

$Q(x)+Q(x^2)=1$이므로

$\alpha+2\alpha=1$, $3\alpha=1$ $\therefore \alpha=\frac{1}{3}$

$\log x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$이므로 $x=10^{\frac{4}{3}}$

(ii) $\frac{1}{2}\le\alpha<1$일 때,

$1\le 2\alpha<2$에서 $\log x^2$의 소수 부분은 $2\alpha-1$이고

$Q(x)+Q(x^2)=1$이므로

$\alpha+(2\alpha-1)=1$, $3\alpha=2$ $\therefore \alpha=\frac{2}{3}$

$\log x=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$이므로 $x=10^{\frac{5}{3}}$

(i), (ii)에서 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^{\frac{4}{3}}\cdot 10^{\frac{5}{3}}=10^3$

0220 올해 매출액이 100억 원일 때, n년 후에 매출액이 5배가 되면 500억 원이므로

$100(1+0.28)^n=500$ $\therefore 1.28^n=5$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.28=\log 5$, $n\log\frac{128}{100}=\log 5$

$n(\log 2^7-\log 100)=1-\log 2$

$\therefore n=\frac{1-\log 2}{7\log 2-2}=\frac{1-0.3}{7\times 0.3-2}=7$

따라서 앞으로 7년 후의 매출액이 올해 매출액의 5배가 된다.

답 **7년 후**

0221 올해 채굴량을 A, 채굴량의 증가율을 a %라 하면

$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=2A$ $\therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^{10}=2$

양변에 상용로그를 취하면

$10\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 2$

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{10}\log 2=\frac{1}{10}\times 0.3=0.03$

이때 $\log 1.07=0.03$이므로

$1+\frac{a}{100}=1.07$ $\therefore a=7$

따라서 채굴량을 매년 7 %씩 증가시켜야 한다.

답 ④

0222 A지역의 소리의 강도를 P_A, A지역의 소리의 크기를 D_A, B지역의 소리의 크기를 D_B라 하면

$D_A=10\log\frac{P_A}{I}$

$D_B=10\log\frac{500P_A}{I}=10\left(\log 500+\log\frac{P_A}{I}\right)$

$=10\log 500+D_A=10(\log 5+\log 100)+D_A$

$=10(1-\log 2+2)+D_A$

$=10\times 2.7+D_A$

$=27+D_A$

따라서 A지역과 B지역의 소리의 크기의 차이는 27 dB이다.

답 **27 dB**

시험에 꼭 나오는 문제 본문 30~33쪽

0223 밑의 조건에서 $a+2>0$, $a+2\ne 1$

$a>-2$, $a\ne -1$ $\therefore -2<a<-1$ 또는 $a>-1$ …… ㉠

진수의 조건에서 $-a^2+a+12>0$

$a^2-a-12<0$, $(a+3)(a-4)<0$

$\therefore -3<a<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-2<a<-1$ 또는 $-1<a<4$

따라서 정수 a의 값은 0, 1, 2, 3이므로 그 합은 6이다.

답 ⑤

0224 $5\log_3\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_3 2-\log_3\sqrt{6}$

$=\frac{5}{2}\log_3 3+\frac{1}{2}\log_3 2-\frac{1}{2}\log_3 6$

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\log_3 2-\frac{1}{2}(\log_3 2+\log_3 3)$

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\log_3 2-\frac{1}{2}\log_3 2-\frac{1}{2}\log_3 3$

$=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$

답 ②

0225 $\log_3 x+\log_3 2y+\log_3 3z=1$에서

$\log_3(x\cdot 2y\cdot 3z)=\log_3 6xyz=1$

$6xyz=3 \quad \therefore xyz=\frac{1}{2}$

$\therefore \{(81^x)^y\}^z=81^{xyz}=(3^4)^{\frac{1}{2}}=3^2=9$

답 ③

0226 $(\log_2 3+\log_{\sqrt[3]{4}} 9)\left(2\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 4\right)$

$=(\log_2 3+\log_{2^{\frac{2}{3}}} 3^2)\left(2\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2^2\right)$

$=(\log_2 3+3\log_2 3)(2\log_3 2+\log_3 2)$

$=4\log_2 3\cdot 3\log_3 2$

$=\frac{4\log 3}{\log 2}\cdot\frac{3\log 2}{\log 3}=12$

답 **12**

0227 ㄱ. $\log_2\frac{1}{8}=\log_2\frac{1}{2^3}=\log_2 2^{-3}=-3$ (참)

ㄴ. $\log_4 32=\log_{2^2} 2^5=\frac{5}{2}\log_2 2=\frac{5}{2}$ (참)

ㄷ. $\log_{\sqrt{2}} 4=\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2=4\log_2 2=4$ (거짓)

ㄹ. $\log_3(\log_{27} 3)=\log_3(\log_{3^3} 3)=\log_3\left(\frac{1}{3}\log_3 3\right)$

$=\log_3\frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0228 $x=\log_3 64$이므로

$\frac{x}{3}=\frac{1}{3}\log_3 64=\frac{1}{3}\log_3 4^3=\log_3 4$

$\therefore 3^{\frac{x}{3}}=3^{\log_3 4}=4$

답 **4**

0229 $\log_2 9\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8=\log_2 3^2\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2^3$

$=2\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot 3\log_5 2$

$=\frac{2\log 3}{\log 2}\cdot\frac{\log 5}{\log 3}\cdot\frac{3\log 2}{\log 5}$

$=6$

$\therefore 2^{\log_2 9\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8}=2^6=64$

답 ④

0230 $\log_{0.2} 45=\frac{\log 45}{\log 0.2}=\frac{\log(5\cdot 3^2)}{\log\frac{2}{10}}$

$=\frac{\log 5+2\log 3}{\log 2-1}=\frac{(1-\log 2)+2\log 3}{\log 2-1}$

$=\frac{1-a+2b}{a-1}=\frac{a-2b-1}{1-a}$

답 ③

0231 $\log_a x=\frac{1}{2}$, $\log_b x=\frac{1}{3}$, $\log_c x=\frac{1}{4}$에서

$\log_x a=2$, $\log_x b=3$, $\log_x c=4$

$\therefore \frac{1}{\log_{abc} x}=\log_x abc=\log_x a+\log_x b+\log_x c$

$=2+3+4=9$

답 ④

0232 $\log_a c:\log_b c=2:1$에서 $2\log_b c=\log_a c$

$\frac{2\log c}{\log b}=\frac{\log c}{\log a}$, $2\log a=\log b$

$\log a^2=\log b \quad \therefore b=a^2$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\log_a a^2+\log_{a^2} a$

$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

0233 $\log_3 a$, $\log_3 b$가 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 a+\log_3 b=4$, $\log_3 a\cdot\log_3 b=2$

$\therefore \log_a\sqrt[3]{b}+\log_b\sqrt[3]{a}$

$=\frac{1}{3}\log_a b+\frac{1}{3}\log_b a$

$=\frac{1}{3}(\log_a b+\log_b a)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{\log_3 b}{\log_3 a}+\frac{\log_3 a}{\log_3 b}\right)$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(\log_3 b)^2+(\log_3 a)^2}{\log_3 a\cdot\log_3 b}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(\log_3 a+\log_3 b)^2-2\log_3 a\cdot\log_3 b}{\log_3 a\cdot\log_3 b}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4^2-2\cdot 2}{2}=2$

답 **2**

0234 $x^3=y^4$에서 $y=x^{\frac{3}{4}}$

$\therefore A=\log_x y=\log_x x^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$

$y^4=z^5$에서 $z=y^{\frac{4}{5}}$

$\therefore B=\log_y z=\log_y y^{\frac{4}{5}}=\frac{4}{5}$

$x^3=z^5$에서 $x=z^{\frac{5}{3}}$

$\therefore C=\log_z x=\log_z z^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$

$\therefore A<B<C$

답 ①

0235 $\log_2 4=2$, $\log_2 8=3$이므로

$2<\log_2 5<3$

따라서 $\log_2 5$의 정수 부분은 2이므로 $x=2$

소수 부분은 $\log_2 5-2$이므로

$y=\log_2 5-2=\log_2 \frac{5}{4}$

$\therefore \frac{2^x+2^y}{2^{-x}+2^{-y}}=\frac{2^2+2^{\log_2 \frac{5}{4}}}{2^{-2}+2^{-\log_2 \frac{5}{4}}}=\frac{4+\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{4}{5}}=5$

답 ⑤

0236 $\log 2.82=0.4502$, $\log 2.60=0.4150$이므로

$\log(28.2\times 260)=\log(2.82\times 10\times 2.60\times 100)$

$=\log 2.82+\log 10+\log 2.60+\log 100$

$=\log 2.82+\log 2.60+3$

$=0.4502+0.4150+3$

$=3.8652$

답 ④

0237 $\log 1$, $\log 2$, $\log 3$, …, $\log 9$의 정수 부분은 모두 0이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(9)=0$

$\log 10$, $\log 11$, $\log 12$, …, $\log 99$의 정수 부분은 모두 1이므로

$f(10)=f(11)=f(12)=\cdots=f(99)=1$

$\log 100$, $\log 101$, $\log 102$, …, $\log 200$의 정수 부분은 모두 2이므로

$f(100)=f(101)=f(102)=\cdots=f(200)=2$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(199)+f(200)$

$=0\cdot 9+1\cdot 90+2\cdot 101$

$=292$

답 **292**

0238 5^{100}이 70자리의 정수이므로 $\log 5^{100}$의 정수 부분은 69이다. 즉

$69\le \log 5^{100}<70$, $69\le 100\log 5<70$

$\therefore 0.69\le \log 5<0.7$ …… ㉠

또한 11^{100}이 105자리의 정수이므로 $\log 11^{100}$의 정수 부분은 104이다. 즉

$104\le \log 11^{100}<105$, $104\le 100\log 11<105$

$\therefore 1.04\le \log 11<1.05$ …… ㉡

이때 $\log 55^{10}=10\log 55=10(\log 5+\log 11)$이므로

㉠+㉡을 하면

$1.73\le \log 5+\log 11<1.75$, $1.73\le \log 55<1.75$

각 변에 10을 곱하면 $17.3\le 10\log 55<17.5$

$\therefore 17.3\le \log 55^{10}<17.5$

따라서 $\log 55^{10}$의 정수 부분이 17이므로 55^{10}은 18자리의 정수이다.

답 ⑤

0239 $\left(\frac{n}{10}\right)^{10}$이 소수점 아래 여섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log\left(\frac{n}{10}\right)^{10}$의 정수 부분은 -6이다.

즉 $-6\le \log\left(\frac{n}{10}\right)^{10}<-5$

$-6\le 10(\log n-1)<-5$, $-0.6\le \log n-1<-0.5$

$\therefore 0.4\le \log n<0.5$

이때 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$,

$\log 4=2\log 2=0.6020$이므로 구하는 자연수 n의 값은 3이다.

답 **3**

0240 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{24}=24\log\frac{1}{2}=-24\log 2$

$=-24\times 0.3010=-7.224$

$=-8+0.776$ …… ㉠

즉 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$의 정수 부분이 -8이므로 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$은 소수점 아래 8째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나온다.

$\therefore a=8$

한편, $\log 5=1-\log 2=0.6990$, $\log 6=\log 2+\log 3=0.7781$이므로

$\log 5<0.776<\log 6$

$-8+\log 5<-8+0.776<-8+\log 6$

$\log(5\cdot 10^{-8})<\log\left(\frac{1}{2}\right)^{24}<\log(6\cdot 10^{-8})$ (∵ ㉠)

$\therefore 5\cdot 10^{-8}<\left(\frac{1}{2}\right)^{24}<6\cdot 10^{-8}$

따라서 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$의 소수점 아래 8째 자리의 숫자는 5이다.

$\therefore b=5$

$\therefore a+b=8+5=13$

답 **13**

0241 $\log N=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면

이차방정식 $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{k}{3}=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}$ …… ㉠

$n\alpha=\frac{k}{3}$ …… ㉡

㉠에서 $n=1$, $\alpha=\frac{2}{3}$

㉡에서 $1\cdot\frac{2}{3}=\frac{k}{3}$ $\therefore k=2$

답 **2**

0242 조건 (가)에서 $\log x$의 정수 부분이 2이므로

$2\le \log x<3$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\log x^3$의 소수 부분과 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^3-\log\frac{1}{x}=3\log x+\log x$

$=4\log x=$(정수)

㉠에 의하여 $8\le 4\log x<12$이므로

$4\log x=8, 9, 10, 11$

$\log x=2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}$

$\therefore x=10^2, 10^{\frac{9}{4}}, 10^{\frac{5}{2}}, 10^{\frac{11}{4}}$

따라서 x의 최댓값은 $10^{\frac{11}{4}}$이므로 $k=10^{\frac{11}{4}}$

$\therefore 100\log k=100\log 10^{\frac{11}{4}}=100\cdot\frac{11}{4}=275$

답 275

0243 $100\le x<1000$에서 $2\le\log x<3$ …… ㉠

$\log x$의 소수 부분과 $\log x^4$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^4-\log x=4\log x-\log x=3\log x=$(정수)

㉠에 의하여 $6\le 3\log x<9$이므로

$3\log x=6, 7, 8$

$\log x=2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}$

$\therefore x=10^2, 10^{\frac{7}{3}}, 10^{\frac{8}{3}}$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^2\cdot 10^{\frac{7}{3}}\cdot 10^{\frac{8}{3}}=10^{2+\frac{7}{3}+\frac{8}{3}}=10^7$

답 ①

0244 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분과 $\log\sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log\sqrt{x}+\log\sqrt[3]{x}=\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{3}\log x=\frac{5}{6}\log x=$(정수)

한편, $\log x$의 정수 부분이 3이므로 $3\le\log x<4$

각 변에 $\frac{5}{6}$를 곱하면

$\frac{5}{2}\le\frac{5}{6}\log x<\frac{10}{3}$, $\frac{5}{6}\log x=3$

$\therefore \log x=\frac{18}{5}=3+\frac{3}{5}$

따라서 $\log x$의 소수 부분은 $\frac{3}{5}$이다.

답 $\frac{3}{5}$

0245 현재 보상 기준 가격은

$1000(1-0.2)^{10}=10^3\times 0.8^{10}$ (만 원)

상용로그를 취하면

$\log(10^3\times 0.8^{10})=3+10\log 0.8$

$=3+10\log\frac{8}{10}$

$=3+10(3\log 2-1)$

$=3+10(3\times 0.30-1)$

$=2$

$\therefore 10^3\times 0.8^{10}=10^2$

따라서 현재 보상 기준 가격은 100만 원이다.

답 ②

0246 정상적인 비의 수소 이온의 농도를 X_0이라 하면

$-\log X_0=5.6$ $\therefore \log X_0=-5.6$

pH 4.82인 비의 수소 이온의 농도를 X_1이라 하면

$-\log X_1=4.82$ $\therefore \log X_1=-4.82$

$\therefore \log\frac{X_1}{X_0}=\log X_1-\log X_0=0.78$

이때 $\log 2=0.30$, $\log 3=0.48$이므로

$\log\frac{X_1}{X_0}=0.78=0.30+0.48=\log 2+\log 3=\log 6$

$\therefore \frac{X_1}{X_0}=6$

따라서 오염 물질의 양은 정상적인 상태의 6배이다.

답 6배

0247 $a=\log_9(2-\sqrt{3})$에서

$9^a=2-\sqrt{3}$ $\therefore 3^{2a}=2-\sqrt{3}$ …… ㉮

$\therefore \frac{27^a-27^{-a}}{3^a+3^{-a}}=\frac{3^{3a}-3^{-3a}}{3^a+3^{-a}}=\frac{3^a(3^{3a}-3^{-3a})}{3^a(3^a+3^{-a})}=\frac{3^{4a}-3^{-2a}}{3^{2a}+1}$

$=\frac{(3^{2a})^2-\frac{1}{3^{2a}}}{3^{2a}+1}$ …… ㉯

$=\frac{(2-\sqrt{3})^2-\frac{1}{2-\sqrt{3}}}{(2-\sqrt{3})+1}$

$=\frac{7-4\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}}$

$=\frac{5(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}=-\frac{5}{\sqrt{3}}=-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ …… ㉰

답 $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	3^{2a}의 값 구하기	30 %
㉯	주어진 식을 3^{2a}으로 나타내기	30 %
㉰	주어진 식의 값 구하기	40 %

0248 $\log_2 12=\log_2(2^2\cdot 3)=2+\log_2 3$이므로 …… ㉮

주어진 방정식은 $x^2+(2+\log_2 3)x+2\log_2 3=0$

$(x+2)(x+\log_2 3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-\log_2 3$ …… ㉯

$\therefore 2^{\alpha}+2^{\beta}=2^{-2}+2^{-\log_2 3}=\frac{1}{4}+2^{\log_2 \frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

…… 다

답 $\frac{7}{12}$

단계	채점요소	배점
가	$\log_2 12$를 변형하기	30 %
나	x의 값 구하기	40 %
다	$2^{\alpha}+2^{\beta}$의 값 구하기	30 %

0249 $\log x$의 소수 부분을 α $(0\le\alpha<1)$라 하면

$\log x=7+\alpha$

…… 가

$\therefore \log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=\frac{1}{2}(7+\alpha)$

$=3.5+\frac{\alpha}{2}=3+0.5+\frac{\alpha}{2}$

따라서 $\log\sqrt{x}$의 정수 부분은 3, 소수 부분은 $0.5+\frac{\alpha}{2}$이다.

…… 나

이때 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분이 0.8이므로

$0.5+\frac{\alpha}{2}=0.8$ $\therefore \alpha=0.6$

…… 다

$\therefore \log\frac{1}{x}=-\log x=-(7+0.6)$

$=-7-0.6=(-7-1)+(1-0.6)$

$=-8+0.4$

따라서 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분은 0.4이다.

…… 라

답 0.4

단계	채점요소	배점
가	$\log x$를 정수 부분과 소수 부분으로 나타내기	20 %
나	$\log\sqrt{x}$의 소수 부분을 $\log x$의 소수 부분으로 나타내기	30 %
다	$\log x$의 소수 부분 구하기	20 %
라	$\log\frac{1}{x}$의 소수 부분 구하기	30 %

0250 $\log 27^{20}=\log(3^3)^{20}=\log 3^{60}=60\log 3$

$=60\times 0.4771=28.626$

$=28+0.626$ …… ㉠

$\log 27^{20}$의 정수 부분이 28이므로 27^{20}은 29자리의 자연수이다.

$\therefore a=29$

…… 가

$\log 4=2\log 2=0.6020$, $\log 5=1-\log 2=0.6990$이므로

$\log 4<0.626<\log 5$

$28+\log 4<28+0.626<28+\log 5$

$\log(4\cdot 10^{28})<\log 27^{20}<\log(5\cdot 10^{28})$ (∵ ㉠)

$\therefore 4\cdot 10^{28}<27^{20}<5\cdot 10^{28}$

따라서 27^{20}의 최고 자리의 숫자는 4이다.

$\therefore b=4$

…… 나

$\therefore a+b=29+4=33$

…… 다

답 33

단계	채점요소	배점
가	a의 값 구하기	40 %
나	b의 값 구하기	50 %
다	$a+b$의 값 구하기	10 %

0251 $\log_a b=\log_b a$에서 $\log_a b=\frac{1}{\log_a b}$

$\therefore (\log_a b)^2=1$

(i) $\log_a b=1$일 때, $a=b$이므로 a, b가 서로 다른 양수라는 조건에 모순이다.

(ii) $\log_a b=-1$일 때, $b=a^{-1}=\frac{1}{a}$ $\therefore ab=1$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$ab+3a+12b=1+3a+\frac{12}{a}$ (∵ $ab=1$)

$\ge 1+2\sqrt{3a\cdot\frac{12}{a}}$

$=1+2\cdot 6=13$ $\left(\text{단, 등호는 } 3a=\frac{12}{a}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

답 ②

0252 $a^x=(\sqrt[3]{b^2})^y=(\sqrt[5]{c})^z=64$에서

$a^x=64$, $b^{\frac{2}{3}y}=64$, $c^{\frac{z}{5}}=64$

$\therefore x=\log_a 64$, $\frac{2}{3}y=\log_b 64$, $\frac{z}{5}=\log_c 64$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{3}{2y}-\frac{5}{z}=\frac{1}{\log_a 64}+\frac{1}{\log_b 64}-\frac{1}{\log_c 64}$

$=\log_{64} a+\log_{64} b-\log_{64} c$

$=\log_{64}\frac{ab}{c}$

$=\log_{64} 2^{18}$ $\left(\because \frac{ab}{c}=2^{18}\right)$

$=\log_{2^6} 2^{18}$

$=3$

답 3

0253 $\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0<\alpha<1$)라 하면

ㄱ. $\log A-2=(n+\alpha)-2=(n-2)+\alpha$이므로

$\log A-2$의 소수 부분은 α이다.

ㄴ. $3-\log A=3-(n+\alpha)=3-n-\alpha$
$=(3-n-1)+(1-\alpha)$
$=(2-n)+(1-\alpha)$
이므로 $3-\log A$의 소수 부분은 $1-\alpha$이다.

ㄷ. $\log 100A=2+\log A=2+(n+\alpha)$
$=(n+2)+\alpha$
이므로 $\log 100A$의 소수 부분은 α이다.

ㄹ. $100\log A=100(n+\alpha)=100n+100\alpha$
그런데 $0<100\alpha<100$이므로 $100\log A$의 소수 부분은 알 수 없다.

ㅁ. $\log\frac{A}{100}=\log A-2=(n+\alpha)-2$
$=(n-2)+\alpha$
이므로 $\log\frac{A}{100}$의 소수 부분은 α이다.

따라서 $\log A$와 소수 부분이 같은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ④

0254 $a\log_{180}5+b\log_{180}2+c\log_{180}3=d$에서
$\log_{180}5^a+\log_{180}2^b+\log_{180}3^c=d$
$\log_{180}(5^a\times2^b\times3^c)=d$
$\therefore 180^d=5^a\times2^b\times3^c$
그런데 $180=2^2\times3^2\times5$에서
$180^d=2^{2d}\times3^{2d}\times5^d$이므로
$2^b\times3^c\times5^a=2^{2d}\times3^{2d}\times5^d$
$\therefore a=d,\ b=2d,\ c=2d$
세 자연수 a, b, c, 즉 d, $2d$, $2d$의 최대공약수가 1이므로 $d=1$
$\therefore a=1,\ b=2,\ c=2$
$\therefore a+b+c+d=1+2+2+1=6$

답 6

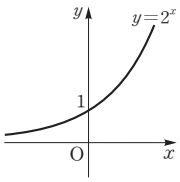
03 지수함수

교과서 문제 정복하기

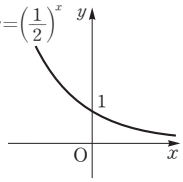
본문 35쪽

0255 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

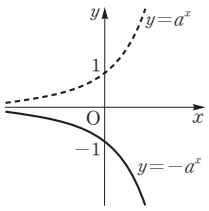
0256 답



0257 답

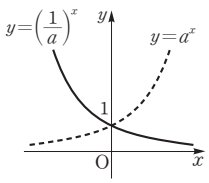


0258 $y=-a^x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



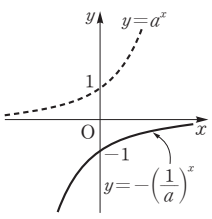
답 풀이 참조

0259 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0260 $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x=-a^{-x}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0261 답 x축, 2

0262 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\therefore y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$

답 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$

0263 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ $\therefore y=2^x$

답 $y=2^x$

0264 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ $\therefore y=-2^x$

답 $y=-2^x$

0265 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $-1\le x\le 1$일 때

$x=-1$에서 최솟값 $3^{-1}=\frac{1}{3}$,

$x=1$에서 최댓값 $3^1=3$을 갖는다.

답 최댓값 : 3, 최솟값 : $\frac{1}{3}$

0266 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $-2\le x\le 2$일 때

$x=-2$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$,

$x=2$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$을 갖는다.

답 최댓값 : 16, 최솟값 : $\frac{1}{16}$

0267 $t=x^2-6x+6$으로 놓으면

$t=(x-3)^2-3\ge -3$

이때 주어진 함수는 $y=3^t$이고, 밑 3이 $3>1$이므로 $t=-3$일 때 최솟값 $y=3^{-3}=\frac{1}{27}$을 갖는다.

답 최솟값 : $\frac{1}{27}$

0268 $t=x^2-2x+3$으로 놓으면

$t=(x-1)^2+2\ge 2$

이때 주어진 함수는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$이고, 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $t=2$일 때 최댓값 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$을 갖는다.

답 최댓값 : $\frac{1}{4}$

0269 $2^x=128$에서 $2^x=2^7$이므로 $x=7$

답 $x=7$

0270 $\left(\frac{1}{9}\right)^x=3\sqrt{3}$에서 $3^{-2x}=3^{\frac{3}{2}}$이므로 $-2x=\frac{3}{2}$

$\therefore x=-\frac{3}{4}$

답 $x=-\frac{3}{4}$

0271 $3^{2x+1}<3^x$에서 밑 3이 $3>1$이므로

$2x+1<x$ $\therefore x<-1$

답 $x<-1$

0272 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{5}\right)^3$에서 밑 $\frac{1}{5}$이 $0<\frac{1}{5}<1$이므로

$2x>3$ $\therefore x>\frac{3}{2}$

답 $x>\frac{3}{2}$

0273 $\sqrt{2}<2^{3x}<64$에서 $2^{\frac{1}{2}}<2^{3x}<2^6$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$\frac{1}{2}<3x<6$ $\therefore \frac{1}{6}<x<2$

답 $\frac{1}{6}<x<2$

0274 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$2x-1>\frac{5}{2}>x-2$

(i) $2x-1>\frac{5}{2}$에서 $2x>\frac{7}{2}$ $\therefore x>\frac{7}{4}$

(ii) $\frac{5}{2}>x-2$에서 $x<\frac{9}{2}$

(i), (ii)에서 $\frac{7}{4}<x<\frac{9}{2}$

답 $\frac{7}{4}<x<\frac{9}{2}$

0275 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2}$에서 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x+2>x^2>3x-2$

(i) $x+2>x^2$에서

$x^2-x-2<0$, $(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

(ii) $x^2>3x-2$에서

$x^2-3x+2>0$, $(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

(i), (ii)에서 $-1<x<1$

답 $-1<x<1$

0276 $3^{2x}-10\cdot3^x+9\le0$에서 $3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-10t+9\le0$, $(t-1)(t-9)\le0$

$\therefore 1\le t\le9$

즉 $1\le3^x\le9$이므로 $3^0\le3^x\le3^2$

밑이 1보다 크므로 $0\le x\le2$

답 $0\le x\le2$

0277 $\left(\frac{1}{9}\right)^x-12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x<-27$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-12t+27<0$, $(t-3)(t-9)<0$

$\therefore 3<t<9$

즉 $3<\left(\frac{1}{3}\right)^x<9$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

밑이 1보다 작으므로 $-2<x<-1$

답 $-2<x<-1$

0278 $4^x-3\cdot2^{x+1}+8\le0$에서 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-6t+8\le0$, $(t-2)(t-4)\le0$

$\therefore 2\le t\le4$

즉 $2\le2^x\le4$이므로 $2^1\le2^x\le2^2$

밑이 1보다 크므로 $1\le x\le2$

답 $1\le x\le2$

유형 익히기 본문 36~44쪽

0279 ② 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.

④ $a>1$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고,

$0<a<1$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

답 ④

0280 ㄹ. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$에서 밑 $\frac{1}{5}$이 $0<\frac{1}{5}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0281 임의의 실수 a, b에 대하여 $a<b$일 때, $f(a)<f(b)$를 만족시킨다는 것은 함수 $f(x)$가 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수임을 의미한다.

따라서 $f(x)=a^x$에서 $a>1$인 함수를 찾으면 된다.

① $f(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 x의 값이

증가하면 y의 값은 감소한다.

② $f(x)=0.1^x=\left(\frac{1}{10}\right)^x$에서 밑 $\frac{1}{10}$이 $0<\frac{1}{10}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

③ $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=3^x$에서 밑 3이 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

④ $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$에서 밑 $\frac{1}{4}$이 $0<\frac{1}{4}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

⑤ $f(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^x$에서 밑 $\frac{4}{5}$가 $0<\frac{4}{5}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

답 ③

0282 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=a^{-x}$ …… ㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+5=a^{-(x-4)}$ $\therefore y=a^{-(x-4)}-5$ …… ㉡

㉡의 그래프가 점 $(2,\ 11)$을 지나므로

$11=a^2-5$

$a^2=16$ $\therefore a=4$ $(\because a>0)$

답 4

0283 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ …… ㉠

㉠의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-2}$

$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-(x+2)}$ $\therefore y=-2^{x+2}$ …… ㉡

㉡의 그래프가 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=-2^3=-8$

답 -8

0284 ㄱ. $y=\sqrt{2}\cdot2^x=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^x=2^{x+\frac{1}{2}}$이므로 $y=\sqrt{2}\cdot2^x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{1}{2^x}=2^{-x}$이므로 $y=\frac{1}{2^x}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=-2^x+3$에서 $y-3=-2^x$, 즉 $-(y-3)=2^x$이므로 $y=-2^x+3$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=2^x$의 그래프를 평행이동하여 겹칠 수 있는 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

0285 $y=a^{2x-4}+2=a^{2(x-2)}+2$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 $y=a^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=a^{2x}$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $y=a^{2x-4}+2$의 그래프는 항상 점 $(2,\ 3)$을 지난다.

즉 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로 $\alpha+\beta=5$

답 5

0286 $y=2^x$의 그래프가 점 $(0,\ a)$를 지나므로 $a=2^0=1$

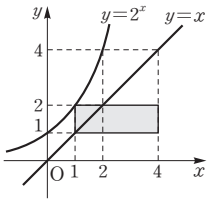
직선 $y=x$가 점 $(b,\ a)$를 지나므로

$a=b$ $\therefore b=1$

또한 $c=2^b=2^1=2$, $d=2^c=2^2=4$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$(4-1)\cdot(2-1)=3$



답 3

0287 $y=4^x$의 그래프가 두 점 $(1,\ a)$, $(b,\ 64)$를 지나므로

$a=4^1$에서 $a=4$

$64=4^b$에서 $b=3$

$\therefore a+b=7$

답 7

0288 함수 $y=2^x$의 그래프가 직선 $y=8$과 만나는 점 A의 x좌표는

$2^x=8=2^3$에서 $x=3$

$\therefore$ A$(3,\ 8)$ …… ㉮

함수 $y=4^x$의 그래프가 직선 $y=8$과 만나는 점 B의 x좌표는

$4^x=8$에서 $2^{2x}=2^3$

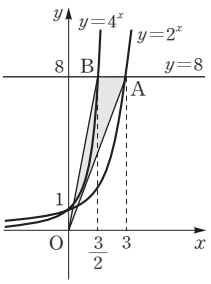
즉 $2x=3$이므로 $x=\frac{3}{2}$

$\therefore$ B$\left(\frac{3}{2},\ 8\right)$ …… ㉯

$\overline{\text{AB}}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$이므로

$\triangle\text{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot8=6$ …… ㉰

답 6



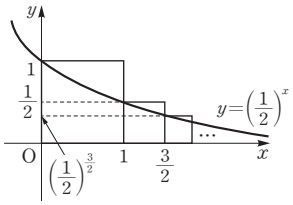
단계	채점요소	배점
㉮	점 A의 좌표 구하기	40 %
㉯	점 B의 좌표 구하기	40 %
㉰	삼각형 OAB의 넓이 구하기	20 %

0289 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 y축의 교점의 좌표가 $(0, 1)$이므로

첫 번째 정사각형의 한 변의 길이는 1,

두 번째 정사각형의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$,

세 번째 정사각형의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$이다.



따라서 세 번째 정사각형의 넓이는

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

답 ②

0290 $A=8^{\frac{1}{4}}=(2^3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

$B=\sqrt[3]{16}=16^{\frac{1}{3}}=(2^4)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$

$C=\sqrt[5]{32}=32^{\frac{1}{5}}=(2^5)^{\frac{1}{5}}=2^1$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$\frac{3}{4}<1<\frac{4}{3}$에서 $2^{\frac{3}{4}}<2^1<2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore A<C<B$

답 ②

0291 $A=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $B=0.25^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=(2^{-2})^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$

$C=\sqrt[5]{8}=(2^3)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{3}{5}}$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$에서 $2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{5}}<2^{\frac{2}{3}}$

$\therefore A<C<B$

답 ②

0292 $A=\frac{1}{3^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$B=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$C=\sqrt[5]{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

이때 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$\frac{1}{5}<\frac{1}{3}<2$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^2<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

$\therefore A<B<C$

답 ①

0293 $0<a<1$이고 $a<b$이므로

$a^a>a^b$

$0<b<1$이고 $a<b$이므로

$b^a>b^b$

한편, $a>0$, $b>0$이고 $a<b$이므로

$a^a<b^a$, $a^b<b^b$

따라서 가장 작은 수는 a^b이고, 가장 큰 수는 b^a이다.

답 ②

0294 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(a)=2$에서 $f(2)=a$

$a=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-2}+3=1+3=4$

또 $g(12)=b$에서 $f(b)=12$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{b-2}+3=12$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{b-2}=9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

즉 $b-2=-2$이므로 $b=0$

$\therefore a+b=4+0=4$

답 **4**

0295 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(4)=a$라 하면 $f(a)=4$

$2^a=4=2^2$ $\quad\therefore a=2$

$g\left(\frac{1}{16}\right)=b$라 하면 $f(b)=\frac{1}{16}$

$2^b=\frac{1}{16}=2^{-4}$ $\quad\therefore b=-4$

$\therefore g(4)\cdot g\left(\frac{1}{16}\right)=2\cdot(-4)=-8$

답 -8

0296 $f(m)=n$이므로 $a^m=n$

$g(\sqrt{n})=k$라 하면 $f(k)=\sqrt{n}$

$a^k=\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}=(a^m)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{m}{2}}$ $\quad\therefore k=\frac{m}{2}$

답 ⑤

0297 $f(x)=3^x$이라 하면 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(k)=2$에서 $f(2)=k$

$\therefore k=3^2=9$

답 ⑤

0298 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-2$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $-2\le x\le 1$일 때

$x=-2$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-2=0$,

$x=1$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-2=-\frac{7}{4}$을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$0+\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{7}{4}$

답 ②

0299 $y=3^x\cdot 4^{-x}-1$에서

$y=3^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x-1 \quad \therefore y=\left(\frac{3}{4}\right)^x-1$

$y=\left(\frac{3}{4}\right)^x-1$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $0\le x\le 2$일 때

$x=0$에서 최댓값 $\left(\frac{3}{4}\right)^0-1=1-1=0$,

$x=2$에서 최솟값 $\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{9}{16}-1=-\frac{7}{16}$

을 갖는다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x-1\ (0\le x\le 2)$의 치역은

$\left\{y\,\middle|\,-\frac{7}{16}\le y\le 0\right\}$

즉 $M=0$, $m=-\frac{7}{16}$이므로

$80(M+m)=80\cdot\left(0-\frac{7}{16}\right)=-35$

답 -35

0300 $f(x)=3^{a-x}=3^a\cdot 3^{-x}=3^a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이다. …… ㉮

따라서 $x=-1$일 때 최댓값 27을 가지므로

$f(-1)=3^{a+1}=27=3^3$

즉 $a+1=3$이므로 $a=2$ …… ㉯

$\therefore f(x)=3^{2-x}$

이 함수는 $x=2$일 때 최소이고 최솟값은

$f(2)=3^{2-2}=1$ …… ㉰

답 1

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 함수가 감소하는 함수임을 알아내기	40 %
㉯	a의 값 구하기	30 %
㉰	최솟값 구하기	30 %

0301 (i) $0<a<1$일 때, 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $f(2)$이므로

$f(-1)=27f(2)$

$a^{-1}=27a^2$, $a^3=\frac{1}{27}$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

(ii) $a>1$일 때, 최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(-1)$이므로

$f(2)=27f(-1)$

$a^2=27a^{-1}$, $a^3=27$

$\therefore a=3$

(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$

답 $\frac{10}{3}$

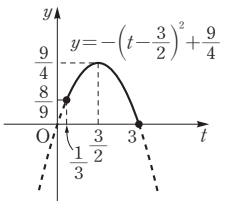
0302 $y=3^{x+1}-9^x=3\cdot 3^x-(3^x)^2$에서

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=3t-t^2=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

이때 $-1\le x\le 1$이므로 t의 값의 범위를 구하면 $3^{-1}\le 3^x\le 3^1$에서

$\frac{1}{3}\le t\le 3$



따라서 주어진 함수는

$t=\frac{3}{2}$일 때 최댓값 $M=\frac{9}{4}$,

$t=3$일 때 최솟값 $m=0$을 갖는다.

$\therefore M+m=\frac{9}{4}+0=\frac{9}{4}$

답 ⑤

0303 $y=4^x-2^{x+a}+b=(2^x)^2-2^a\cdot 2^x+b$에서

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2^at+b$ …… ㉠

이때 ㉠은 $x=1$, 즉 $t=2^1=2$일 때 최솟값 -3을 가지므로

$y=t^2-2^at+b=(t-2)^2-3=t^2-4t+1$

따라서 $2^a=4$, $b=1$에서 $a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=3$

답 3

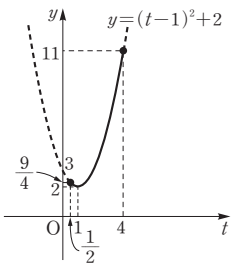
0304 $y=4^{-x}-2^{1-x}+3=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2t+3$

$=(t-1)^2+2$

이때 $-2\le x\le 1$이므로 t의 값의 범위를 구하면



$\left(\frac{1}{2}\right)^1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$에서 $\frac{1}{2} \le t \le 4$

따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최솟값 2, $t=4$일 때 최댓값 11을 갖는다.

$\therefore b=2,\ d=11$

$t=1$, 즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$에서

$x=0 \quad \therefore a=0$

$t=4$, 즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$에서

$x=-2 \quad \therefore c=-2$

$\therefore ab-cd=0-(-22)=22$

답 **22**

0305 $y=9^x-2\cdot 3^{x+1}+k=(3^x)^2-2\cdot 3\cdot 3^x+k$에서

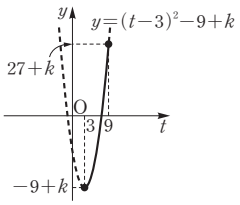
$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-6t+k=(t-3)^2-9+k$

이때 $1 \le x \le 2$이므로 t의 값의 범위를 구하면

$3^1 \le 3^x \le 3^2$에서

$3 \le t \le 9$



따라서 주어진 함수는 $t=9$일 때 최댓값 18을 가지므로

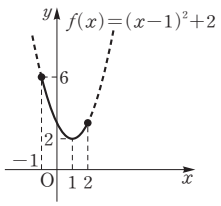
$(9-3)^2-9+k=18 \quad \therefore k=-9$

답 **−9**

0306 $f(x)=x^2-2x+3$으로 놓으면

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 이 함수는 $f(x)$가 최대일 때 최솟값을 가지고, $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이므로 $-1 \le x \le 2$에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 2를 가지고, $x=-1$일 때 최댓값 6을 갖는다.



따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하면

$M=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\ m=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

$\therefore \frac{m}{M}=\frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{16}$

답 ①

0307 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2^{g(x)}$

$y=2^{g(x)}$에서 밑 2가 $2>1$이므로 이 함수는 $g(x)$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $g(x)=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$이므로 $g(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 4를 갖는다.

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 $2^4=16$을 갖는다.

즉 $a=-1,\ m=16$이므로

$a+m=-1+16=15$

답 **15**

0308 $f(x)=-x^2+2x+2$로 놓으면 $y=a^{-x^2+2x+2}=a^{f(x)}$에서 밑 a가 $0<a<1$이므로 이 함수는 $f(x)$가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$이므로 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

따라서 주어진 함수의 최솟값은 a^3이고, 이 값이 $\frac{1}{64}$이므로

$a^3=\frac{1}{64} \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

답 ③

0309 $f(x)=-x^2+4x-3$으로 놓으면 $y=a^{-x^2+4x-3}=a^{f(x)}$에서 밑 a가 $0<a<1$이므로 이 함수는 $f(x)$가 최대일 때 최솟값을 가지고, $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $f(x)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$이므로 $0 \le x \le 3$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 1을 가지고 $x=0$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

따라서 함수 $y=a^{-x^2+4x-3}$은 $x=0$일 때 최대이고, 최댓값이 125이므로

$a^{-3}=125 \quad \therefore a=\frac{1}{5}$

함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2+4x-3}$은 $x=2$일 때 최소이고,

최솟값은 $\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{1}{5}$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\left\{y \middle| \frac{1}{5} \le y \le 125\right\}$이므로

$m=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

0310 $2^x>0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$h(x)=f(x)+g(x)+4$

$=2^x+2^{-x}+4$

$\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}+4=6$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

따라서 $h(x)$의 최솟값은 6이다.

답 ③

0311 $4^x>0,\ 4^{-x+3}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f(x)=4^x+4^{-x+3} \ge 2\sqrt{4^x\cdot 4^{-x+3}}=2\cdot 8=16$

이때 등호가 성립하는 경우는 $4^x=4^{-x+3}$, 즉 $x=\frac{3}{2}$일 때이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 16을 가지므로

$a=\frac{3}{2}$, $b=16$

$\therefore ab=\frac{3}{2}\cdot 16=24$ ㉯

답 **24**

단계	채점요소	배점
㉮	산술평균과 기하평균의 관계 적용하기	60%
㉯	ab의 값 구하기	40%

0312 (1) $\frac{1}{3^x}+3^y=3^{-x}+3^y$에서 $3^{-x}>0$, $3^y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{3^x}+3^y=3^{-x}+3^y\geq 2\sqrt{3^{-x}\cdot 3^y}$$
$$=2\sqrt{3^{-x+y}}$$
$$=2\sqrt{3^{-(x-y)}}$$
$$=2\sqrt{3^{-2}}\ (\because x-y=2)$$
$$=\frac{2}{3}$$

이때 등호가 성립하는 경우는 $3^{-x}=3^y$, 즉 $-x=y$일 때이다.

그런데 $x-y=2$이므로 등호는 $x=1$, $y=-1$일 때 성립한다.

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

(2) $9^x>0$, $3^{y+3}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9^x+3^{y+3}\geq 2\sqrt{9^x\cdot 3^{y+3}}$$
$$=2\sqrt{3^{2x+y+3}}$$
$$=2\sqrt{3^2}\ (\because 2x+y+1=0)$$
$$=6$$

이때 등호가 성립하는 경우는 $9^x=3^{y+3}$, 즉 $2x=y+3$일 때이다. 그런데 $2x+y+1=0$이므로 등호는 $x=\frac{1}{2}$, $y=-2$일 때 성립한다.

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) **6**

0313 $3^{a+x}>0$, $3^{a-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3^{a+x}+3^{a-x}\geq 2\sqrt{3^{a+x}\cdot 3^{a-x}}$$
$$=2\sqrt{3^{2a}}$$
$$=2\cdot 3^a\ (\text{단, 등호는 } x=0\text{일 때 성립})$$

따라서 함수 $y=3^{a+x}+3^{a-x}$의 최솟값은 $2\cdot 3^a$이고, 이 값이 54이므로

$2\cdot 3^a=54$, $3^a=27=3^3$

$\therefore a=3$

답 **3**

0314 $3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\geq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=6(3^x+3^{-x})-(9^x+9^{-x})$
$=6t-(t^2-2)$
$=-t^2+6t+2$
$=-(t-3)^2+11$

$t\geq 2$이므로 주어진 함수는 $t=3$일 때 최댓값 11을 갖는다.

답 ③

0315 $\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{-x}}=2^{\frac{1}{2}x}+2^{-\frac{1}{2}x}=t$로 놓으면

$2^{\frac{1}{2}x}>0$, $2^{-\frac{1}{2}x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^{\frac{1}{2}x}+2^{-\frac{1}{2}x}\geq 2\sqrt{2^{\frac{1}{2}x}\cdot 2^{-\frac{1}{2}x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $2^x+2^{-x}=(2^{\frac{1}{2}x}+2^{-\frac{1}{2}x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=2^x+2^{-x}-(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{-x}})$
$=t^2-2-t=t^2-t-2$
$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

$t\geq 2$이므로 주어진 함수는 $t=2$일 때 최솟값 0을 갖는다.

답 ①

0316 $5^x+5^{-x}=t$로 놓으면 $5^x>0$, $5^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=5^x+5^{-x}\geq 2\sqrt{5^x\cdot 5^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $25^x+25^{-x}=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=2(5^x+5^{-x})-(25^x+25^{-x})+3=2t-(t^2-2)+3$
$=-t^2+2t+5=-(t-1)^2+6$

$t\geq 2$이므로 주어진 함수는 $t=2$일 때 최댓값 5를 갖는다.

답 ③

0317 $2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=4^x+4^{-x}-3(2^x+2^{-x})+\frac{1}{2}=(t^2-2)-3t+\frac{1}{2}$

$=t^2-3t-\frac{3}{2}=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{15}{4}$

$t\geq 2$이므로 주어진 함수는 $t=2$일 때 최솟값 $-\frac{7}{2}$을 갖는다.

$t=2$일 때 $x=0$이므로 $\alpha=0$, $\beta=-\frac{7}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{7}{2}$

답 $-\frac{7}{2}$

0318 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2}\cdot 27^x=\sqrt{3}$에서 $3^{-2x^2}\cdot 3^{3x}=3^{\frac{1}{2}}$

$3^{-2x^2+3x}=3^{\frac{1}{2}}$

즉 $-2x^2+3x=\frac{1}{2}$에서 $4x^2-6x+1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

답 ③

0319 (1) $8^{2x+3}=4\sqrt[3]{2}$에서

$2^{3(2x+3)}=2^{2+\frac{1}{3}}$이므로

$6x+9=2+\frac{1}{3}$

$\therefore x=-\frac{10}{9}$

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-4}$에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-(3x-4)}$이므로

$x^2=-(3x-4)$, $x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(3) $(64^x)^x=4^{4x}$에서

$(4^{3x})^x=4^{4x}$, $4^{3x^2}=4^{4x}$이므로

$3x^2=4x$, $x(3x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

답 (1) $x=-\frac{10}{9}$ (2) $x=-4$ 또는 $x=1$

(3) $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

0320 $3^{x^2-10x}-27^{-2x+a}=0$에서

$3^{x^2-10x}=3^{3(-2x+a)}$이므로

$x^2-10x=3(-2x+a)$

$x^2-4x-3a=0$ ····· ㉠

이 방정식의 한 근이 -2이므로

$(-2)^2-4\cdot(-2)-3a=0$

$\therefore a=4$

이때 ㉠은 $x^2-4x-12=0$이므로

$(x+2)(x-6)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 다른 한 근은 6이다.

답 6

0321 $\frac{2^{x^2+1}}{2^{x-1}}=16$에서 $2^{x^2+1-(x-1)}=2^4$

$2^{x^2-x+2}=2^4$

즉 $x^2-x+2=4$이므로

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=-1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=5$

답 5

0322 $9^x+27^x=10\cdot 3^{x+2}$에서

$(3^x)^2+(3^x)^3=90\cdot 3^x$

이때 $3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2+t^3=90t$, $t^3+t^2-90t=0$

$t(t+10)(t-9)=0$

$\therefore t=-10$ 또는 $t=0$ 또는 $t=9$

그런데 $t>0$이므로 $t=9$

$3^x=9=3^2$에서 $x=2$ $\therefore \alpha=2$

$\therefore 2^\alpha=2^2=4$

답 ②

0323 (1) $4^x-9\cdot 2^x+8=0$에서

$(2^x)^2-9\cdot 2^x+8=0$

이때 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-9t+8=0$, $(t-1)(t-8)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=8$

즉 $2^x=1=2^0$ 또는 $2^x=8=2^3$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

(2) $5^{x+1}-5^{-x}=4$에서

$5\cdot 5^x-\frac{1}{5^x}-4=0$

이때 $5^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$5t-\frac{1}{t}-4=0$, $5t^2-4t-1=0$, $(t-1)(5t+1)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-\frac{1}{5}$

그런데 $t>0$이므로 $t=1$

즉 $5^x=1=5^0$ $\therefore x=0$

(3) $4^{-x}-5\cdot 2^{-x+1}+16=0$에서

$(2^{-x})^2-10\cdot 2^{-x}+16=0$

이때 $2^{-x}=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-10t+16=0$, $(t-2)(t-8)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=8$

즉 $2^{-x}=2=2^1$ 또는 $2^{-x}=8=2^3$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-3$

답 (1) $x=0$ 또는 $x=3$ (2) $x=0$

(3) $x=-1$ 또는 $x=-3$

0324 $a^{2x}-a^x=6$에서 $(a^x)^2-a^x-6=0$

이때 $a^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-t-6=0$, $(t+2)(t-3)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=3$

그런데 $t>0$이므로 $t=3$

즉 $a^x=3$이므로 $x=\frac{1}{4}$을 대입하면

$a^{\frac{1}{4}}=3 \quad \therefore a=3^4=81$

답 **81**

0325 $9^x-4\cdot3^{x+1}+27=0$에서

$(3^x)^2-12\cdot3^x+27=0$ …… ㉠

이때 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-12t+27=0$ …… ㉡

㉠의 두 근이 α, β이므로 ㉡의 두 근은 3^α, 3^β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha\cdot3^\beta=27$, $3^{\alpha+\beta}=3^3$

$\therefore \alpha+\beta=3$

답 **3**

0326 (1) $3^{2x}-4\cdot3^x-k=0$ …… ㉠

에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-k=0$ …… ㉡

㉠의 두 근이 α, β이므로 ㉡의 두 근은 3^α, 3^β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha\cdot3^\beta=-k$, $3^{\alpha+\beta}=-k$

이때 $\alpha+\beta=-1$이므로

$3^{-1}=-k \quad \therefore k=-\frac{1}{3}$

(2) $4^x-7\cdot2^x+12=0$ …… ㉠

에서 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-7t+12=0$ …… ㉡

㉠의 두 근이 α, β이므로 ㉡의 두 근은 2^α, 2^β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^\beta=7$, $2^\alpha\cdot2^\beta=12$

$\therefore 2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha)^2+(2^\beta)^2$

$=(2^\alpha+2^\beta)^2-2\cdot2^\alpha\cdot2^\beta$

$=7^2-2\cdot12$

$=49-24=25$

답 (1) $-\frac{1}{3}$ (2) **25**

0327 $(x+7)^{x+1}=4^{x+1}$에서

(i) $x+1\neq0$일 때

$x+7=4$이므로 $x=-3$

(ii) $x+1=0$, 즉 $x=-1$일 때

주어진 방정식은 $6^0=4^0=1$이므로 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

따라서 모든 근의 합은

$-3+(-1)=-4$

답 -4

0328 $x^{x^2-8}=x^{2x+7}$에서

(i) $x\neq1$일 때

$x^2-8=2x+7$, $x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

그런데 $x>0$이므로 $x=5$

(ii) $x=1$일 때

주어진 방정식은 $1^{-7}=1^9=1$이므로 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 모든 근의 합은

$1+5=6$

답 **6**

0329 (1) $(x-2)^{x-3}=(2x-3)^{x-3}\ (x>2)$

(i) $x-2=2x-3$일 때 $x=1$

그런데 $x>2$이므로 해는 없다.

(ii) $x-3=0$, 즉 $x=3$일 때

주어진 방정식은 $1^0=3^0=1$이므로 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=3$

(2) $(x+2)^{3-2x}=(x+2)^{x^2}\ (x>-2)$

(i) $3-2x=x^2$일 때

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x>-2$이므로 $x=1$

(ii) $x+2=1$, 즉 $x=-1$일 때

주어진 방정식은 $1^5=1^1=1$이므로 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

답 (1) $x=3$ (2) $x=1$ 또는 $x=-1$

0330 (1) $(x-1)^{x^2-3x+2}=1\ (x>1)$에서

(i) $x^2-3x+2=0$일 때

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

그런데 $x>1$이므로 $x=2$

(ii) $x-1=1$, 즉 $x=2$일 때

주어진 방정식은 $1^0=1$이므로 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=2$

(2) $(x^2-x+1)^{x+3}=1$에서

(i) $x+3=0$, 즉 $x=-3$일 때

주어진 방정식은 $13^0=1$이므로 성립한다.

(ii) $x^2-x+1=1$일 때

$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

답 (1) $x=2$ (2) $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

0331 $2^x=X\ (X>0)$, $3^y=Y\ (Y>0)$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} X+2Y=26 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2X-Y=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $X=8$, $Y=9$

즉 $2^x=8=2^3$에서 $x=3$, $3^y=9=3^2$에서 $y=2$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=5$

답 5

0332 $3^x=X\ (X>0)$, $3^y=Y\ (Y>0)$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} X+Y=\frac{28}{3} & \cdots\cdots ㉠ \\ XY=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $Y=\frac{28}{3}-X$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$X\left(\frac{28}{3}-X\right)=3$, $X^2-\frac{28}{3}X+3=0$

$3X^2-28X+9=0$, $(3X-1)(X-9)=0$

$\therefore X=\frac{1}{3}, Y=9$ 또는 $X=9, Y=\frac{1}{3}$

즉 $3^x=\frac{1}{3}, 3^y=9$ 또는 $3^x=9, 3^y=\frac{1}{3}$

따라서 $x=-1, y=2$ 또는 $x=2, y=-1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-1)^2+2^2=5$

답 5

0333 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}<\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-x}$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}}$

이때 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$2x+1>-\frac{x}{2}$, $\frac{5}{2}x>-1$

$\therefore x>-\frac{2}{5}$

답 ①

0334 $4^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$에서 $2^{2x}>(2^{-1})^{1-x}$, $2^{2x}>2^{x-1}$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$2x>x-1$ $\quad\therefore x>-1$

따라서 주어진 부등식의 해의 집합은 $\{x|x>-1\}$이다.

답 ①

0335 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\ge\frac{1}{64}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^6$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$3x\le6$ $\quad\therefore x\le2$

$\therefore A=\{x|x\le2\}$

$27^{x^2-5x-8}<9^{x^2-5x}$에서 $3^{3(x^2-5x-8)}<3^{2(x^2-5x)}$

이때 밑 3이 $3>1$이므로

$3(x^2-5x-8)<2(x^2-5x)$, $x^2-5x-24<0$

$(x+3)(x-8)<0$ $\quad\therefore -3<x<8$

$\therefore B=\{x|-3<x<8\}$

따라서 $A\cap B=\{x|-3<x\le2\}$이므로 집합 $A\cap B$에 속하는 정수인 원소는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

답 5

0336 $\left(\frac{1}{10}\right)^{f(x)}\le\left(\frac{1}{10}\right)^{g(x)}$에서 밑 $\frac{1}{10}$이 $0<\frac{1}{10}<1$이므로

$f(x)\ge g(x)$

따라서 주어진 부등식의 해는 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있거나 만날 때의 x의 값의 범위이므로

$x\le a$ 또는 $0\le x\le c$

답 ②

0337 $4^{-x}-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+16<0$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+16<0$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-10t+16<0$, $(t-2)(t-8)<0$ $\quad\therefore 2<t<8$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$-3<x<-1$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=-1$이므로

$\alpha+\beta=-4$

답 -4

0338 (1) $4^{x+1}-9\cdot2^x+2\le0$에서

$4\cdot2^{2x}-9\cdot2^x+2\le0$

이때 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$4t^2-9t+2\le0$, $(4t-1)(t-2)\le0$

$\therefore \frac{1}{4}\le t\le2$

즉 $2^{-2}\le2^x\le2^1$에서 밑 2가 $2>1$이므로 $-2\le x\le1$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x>9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$

이때 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+\frac{1}{9}t>9t+1$, $9t^2-80t-9>0$

$(9t+1)(t-9)>0$

$\therefore t>9\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$이고 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x<-2$

(3) $3^{x+2}+3^{1-x}\le 28$에서

$9\cdot 3^x+\frac{3}{3^x}\le 28$

이때 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$9t+\frac{3}{t}\le 28,\ 9t^2-28t+3\le 0$

$(9t-1)(t-3)\le 0$

$\therefore \frac{1}{9}\le t\le 3$

즉 $3^{-2}\le 3^x\le 3^1$에서 밑 3이 $3>1$이므로

$-2\le x\le 1$

답 (1) $-2\le x\le 1$ (2) $x<-2$ (3) $-2\le x\le 1$

0339 $4^{x+1}+a\cdot 2^x+b\le 0$에서

$4\cdot(2^x)^2+a\cdot 2^x+b\le 0$ …… ㉠

이때 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$4t^2+at+b\le 0$ …… ㉡

㉠의 해가 $-3\le x\le 2$이므로 $2^{-3}\le 2^x\le 2^2$, 즉 $\frac{1}{8}\le t\le 4$

따라서 ㉡의 해가 $\frac{1}{8}\le t\le 4$이므로

$4\left(t-\frac{1}{8}\right)(t-4)\le 0,\ 4t^2-\frac{33}{2}t+2\le 0$

따라서 $a=-\frac{33}{2},\ b=2$이므로

$ab=-33$

답 -33

0340 $a^{2x}-28\cdot a^x+b<0$에서 …… ㉠

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-28t+b<0$ …… ㉡

㉠의 해가 $0<x<3$이고 $a>1$이므로

$a^0<a^x<a^3$, 즉 $1<t<a^3$

따라서 ㉡의 해가 $1<t<a^3$이므로

$(t-1)(t-a^3)<0,\ t^2-(a^3+1)t+a^3<0$

따라서 $a^3+1=28,\ a^3=b$이므로

$a^3=27=3^3$ $\therefore a=3,\ b=27$

$\therefore a+b=30$

답 30

0341 부등식 $x^{x-1}\ge x^{-x+5}$에서

(i) $0<x<1$일 때

$x-1\le -x+5$에서 $x\le 3$

$\therefore 0<x<1$

(ii) $x=1$일 때

주어진 부등식은 $1^0=1^4=1$이므로 성립한다.

$\therefore x=1$

(iii) $x>1$일 때

$x-1\ge -x+5$에서 $x\ge 3$

$\therefore x\ge 3$

(i), (ii), (iii)에서

$0<x\le 1$ 또는 $x\ge 3$

답 ③

0342 $x^{x^2+3}<x^{4x}$에서 $x>1$이므로

$x^2+3<4x,\ x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0$

$\therefore 1<x<3$

답 ①

0343 부등식 $x^{3x+1}>x^{x+5}$에서

(i) $0<x<1$일 때

$3x+1<x+5$에서 $x<2$

$\therefore 0<x<1$

(ii) $x=1$일 때

주어진 부등식은 $1^4>1^6$이므로 성립하지 않는다.

$\therefore x\ne 1$

(iii) $x>1$일 때

$3x+1>x+5$에서 $x>2$

$\therefore x>2$

(i), (ii), (iii)에서 $0<x<1$ 또는 $x>2$

답 ④

0344 $x^{2x^2-5x}>\frac{1}{x^2}$에서

$x^{2x^2-5x}>x^{-2}$ …… ㉠

(i) $0<x<1$일 때 ㉠에서

$2x^2-5x<-2,\ 2x^2-5x+2<0$

$(2x-1)(x-2)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<x<2$

그런데 $0<x<1$이므로 $\frac{1}{2}<x<1$

(ii) $x=1$일 때 ㉠에서 $1^{-3}>1^{-2}$이므로 성립하지 않는다.

$\therefore x\ne 1$

(iii) $x>1$일 때 ㉠에서

$2x^2-5x>-2,\ 2x^2-5x+2>0$

$(2x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$

그런데 $x>1$이므로 $x>2$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{1}{2}<x<1$ 또는 $x>2$이므로

$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=1,\ \gamma=2$

$\therefore \alpha\beta\gamma=1$

답 1

0345 (i) $2^{-x-1} \le 2^x$에서

밑이 1보다 크므로

$-x-1 \le x$

$-2x \le 1 \quad \therefore x \ge -\frac{1}{2}$

(ii) $2^x \le 8 \cdot 2^{-2x}$에서

$2^x \le 2^3 \cdot 2^{-2x}$, $2^x \le 2^{3-2x}$

밑이 1보다 크므로

$x \le 3-2x$

$3x \le 3 \quad \therefore x \le 1$

(i), (ii)에서 부등식 $2^{-x-1} \le 2^x \le 8 \cdot 2^{-2x}$의 해는

$-\frac{1}{2} \le x \le 1$

답 $\boldsymbol{-\frac{1}{2} \le x \le 1}$

0346 (1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} = (2^{-2})^{x+2} = 2^{-2x-4}$

$\sqrt{8} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} = (2^{-1})^{2x-3} = 2^{-2x+3}$

따라서 주어진 부등식은

$2^{-2x-4} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{-2x+3}$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$-2x-4 < \frac{3}{2} < -2x+3$

즉 $-4x-8 < 3 < -4x+6$

(i) $-4x-8<3$에서 $x > -\frac{11}{4}$

(ii) $3 < -4x+6$에서 $x < \frac{3}{4}$

(i), (ii)의 공통 범위는 $-\frac{11}{4} < x < \frac{3}{4}$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2}$에서 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$3x-2 < x^2 < x+2$

(i) $3x-2 < x^2$에서

$x^2-3x+2>0$, $(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

(ii) $x^2 < x+2$에서

$x^2-x-2<0$, $(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

(i), (ii)의 공통 범위는 $-1<x<1$

(3) (i) $\frac{1}{81} \le 3^x \le \frac{1}{9}$에서

$3^{-4} \le 3^x \le 3^{-2}$

이때 밑 3이 $3>1$이므로 $-4 \le x \le -2$

(ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \le 64 \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $2x \le -6 \le x+1$

$\therefore -7 \le x \le -3$

(i), (ii)의 공통 범위는 $-4 \le x \le -3$

답 (1) $\boldsymbol{-\frac{11}{4} < x < \frac{3}{4}}$ (2) $\boldsymbol{-1<x<1}$

(3) $\boldsymbol{-4 \le x \le -3}$

0347 $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 \le 0$에서 $3^x = a$ $(a>0)$로 놓으면

$a^2-12a+27 \le 0$, $(a-3)(a-9) \le 0$

$\therefore 3 \le a \le 9$

즉 $3^1 \le 3^x \le 3^2$이고 밑 3이 $3>1$이므로

$1 \le x \le 2$

$\therefore A = \{x \mid 1 \le x \le 2\}$

또 $\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x < 12$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = b$ $(b>0)$로 놓으면

$b^2-b-12<0$, $(b+3)(b-4)<0$

$\therefore -3<b<4$

그런데 $b>0$이므로 $0<b<4$

즉 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$이고 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$x>-2$

$\therefore B = \{x \mid x>-2\}$

따라서 $A \cap B = \{x \mid 1 \le x \le 2\}$이므로 집합 $A \cap B$에 속하는 모든 정수인 원소의 합은 $1+2=3$

답 **3**

0348 (i) $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-2} \le -1$에서

$2 \cdot (2^x)^2 - \frac{33}{4} \cdot 2^x + 1 \le 0$

이때 $2^x = a$ $(a>0)$로 놓으면

$2a^2 - \frac{33}{4}a + 1 \le 0$, $8a^2-33a+4 \le 0$

$(8a-1)(a-4) \le 0$

$\therefore \frac{1}{8} \le a \le 4$

즉 $2^{-3} \le 2^x \le 2^2$이고 밑 2가 $2>1$이므로

$-3 \le x \le 2$

(ii) $9^x + 3^x > 12$에서 $(3^x)^2 + 3^x - 12 > 0$

이때 $3^x = b$ $(b>0)$로 놓으면 $b^2+b-12>0$

$(b+4)(b-3)>0$

$\therefore b<-4$ 또는 $b>3$

그런데 $b>0$이므로 $b>3$

즉 $3^x > 3^1$이고 밑 3이 $3>1$이므로

$x>1$

(i), (ii)의 공통 범위는 $1<x \le 2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=3$

답 **3**

유형 up

본문 45쪽

0349 $2^{2x}-2^{x+1}+k>0$에서 $(2^x)^2-2\cdot 2^x+k>0$

이때 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t+k>0$, 즉 $(t-1)^2-1+k>0$ ····· ㉠

$t>0$일 때, 이차부등식 ㉠이 항상 성립하기 위해서는

$-1+k>0$이어야 한다.

$\therefore k>1$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 2이다.

답 ③

0350 $2^{x+1}-2^{\frac{x+4}{2}}+a\geq 0$에서

$2^{x+1}=2\cdot 2^x=2\cdot(2^{\frac{x}{2}})^2$, $2^{\frac{x+4}{2}}=2^2\cdot 2^{\frac{x}{2}}$

이므로 $2^{\frac{x}{2}}=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$2t^2-4t+a\geq 0$, $2(t-1)^2+a-2\geq 0$ ····· ㉠

$t>0$일 때, 이차부등식 ㉠이 항상 성립하기 위해서는

$a-2\geq 0$이어야 한다.

$\therefore a\geq 2$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

0351 $3^t=a\ (a>0)$로 놓으면

$3x^2-(a+3)x+(a+3)>0$

위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-(a+3)x+(a+3)=0$의 판별식 $D<0$이어야 한다.

$D=(a+3)^2-4\cdot 3(a+3)<0$

$(a+3)(a-9)<0$

$\therefore -3<a<9$

그런데 $a>0$이므로 $0<a<9$

즉 $0<3^t<3^2$이므로 $t<2$

답 ⑤

0352 $1024=2^{10}$, $\frac{1}{4}=2^{-2}$이므로 물질의 양이 절반으로 감소하는 횟수를 x회라 하면

$2^{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-12}$

$\therefore x=12$

따라서 50년마다 그 양이 $\frac{1}{2}$씩 감소하므로

$50\cdot 12=600$(년)

답 600년

0353 10마리의 박테리아 A가 2시간 후 90마리가 되었으므로

$10a^2=90$, $a^2=9$ $\therefore a=3\ (\because a>0)$

10마리의 박테리아 A가 t시간 후 7290마리 이상이 된다고 하면

$10\cdot 3^t\geq 7290$

$3^t\geq 729$, $3^t\geq 3^6$ $\therefore t\geq 6$

따라서 10마리의 박테리아 A가 7290마리 이상이 되는 것은 최소 6시간 후이다.

$\therefore n=6$

답 6

0354 살충제를 살포하기 전 해충 수를 a마리라 하면

살충제 살포 직후부터 x시간 후의 해충 수는 $a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}}$마리이다. ····· ㉮

이때 처음 해충 수의 $\frac{1}{32}$이 되려면

$a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}}=\frac{1}{32}a$에서 ····· ㉯

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}}=\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$

즉 $\frac{x}{6}=5$이므로 $x=30$

따라서 처음 해충 수의 $\frac{1}{32}$이 되기까지 30시간이 걸린다. ····· ㉰

답 30시간

단계	채점요소	배점
㉮	처음 해충 수를 a마리로 놓고 살충제 살포 직후부터 x시간 후의 해충 수를 식으로 나타내기	30 %
㉯	지수방정식 세우기	30 %
㉰	x의 값 구하기	40 %

0355 처음 두 배양기 A, B에 있던 박테리아 수를 각각 a마리라 하면 t시간 후의 배양기 A에 있는 박테리아 수는 $a\cdot 2^t$마리, 배양기 B에 있는 박테리아 수는 $a\cdot 4^{\frac{t}{3}}$마리이므로 두 배양기 A, B에 있는 박테리아 수의 합이 처음 수의 40배가 되려면

$a\cdot 2^t+a\cdot 4^{\frac{t}{3}}=40(a+a)$

$a>0$이므로 $2^t+2^{\frac{2}{3}t}=80$

이때 $2^{\frac{t}{3}}=X\ (X>0)$로 놓으면

$X^3+X^2=80$, $X^3+X^2-80=0$

$(X-4)(X^2+5X+20)=0$

$\therefore X=4\ (\because X>0)$

즉 $2^{\frac{t}{3}}=4=2^2$에서

$\frac{t}{3}=2$ $\therefore t=6$

따라서 두 배양기 A, B에 있는 박테리아 수의 합이 처음 수의 40배가 되는 것은 6시간 후이다.

답 6시간 후

시험에 꼭 나오는 문제 본문 46~49쪽

0356 $f(3)=2^3-1=7$

$g(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$

$\therefore f(3)+\{g(-2)\}^2=7+9^2=88$

답 88

0357 지수함수 $y=4^{2x-1}-2$에서

$y=4^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-2$ $\therefore y=16^{x-\frac{1}{2}}-2$

즉 함수 $y=4^{2x-1}-2$의 그래프는 $y=16^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (거짓)

ㄴ. 그래프는 직선 $y=-2$를 점근선으로 갖는다. (참)

ㄷ. 정의역은 모든 실수, 치역은 $\{y|y>-2\}$이다. (거짓)

ㄹ. 함수 $y=4^{2x-1}-2$에서 $x=\frac{1}{2}$일 때, $y=4^{1-1}-2=-1$이므로 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$을 지난다. (참)

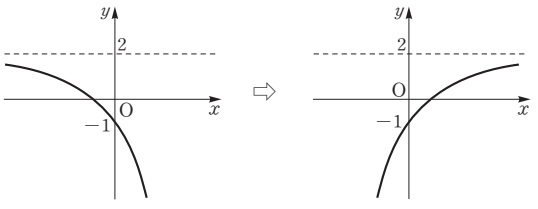
ㅁ. 함수 $y=4^{2x-1}-2$의 그래프는 $y=16^x$의 그래프를 평행이동한 것이므로 $y=2^x$의 그래프와 겹치지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

0358 $y=-3^{x+1}+2$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 [그림 1]과 같다.

따라서 $y=-3^{x+1}+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1] [그림 2]

답 ④

0359 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\therefore y=-2^{-x}$

$y=-2^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $y=-2^{-(x-a)}+b$

이 그래프가 점 $(-1, -1)$을 지나므로

$-1=-2^{1+a}+b$ ····· ㉠

점 $(-2, -9)$를 지나므로

$-9=-2^{2+a}+b$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$8=2^{2+a}-2^{1+a}$

$2^3=(2-1)\cdot 2^{1+a}$

즉 $3=1+a$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$-1=-2^{1+2}+b$ $\therefore b=7$

$\therefore a+b=2+7=9$

답 9

0360 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=2^{-x}$

이 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y=2^{-(x-a)}+b$

그런데 이 그래프의 점근선이 직선 $y=-2$이므로

$b=-2$

또 그래프가 원점을 지나므로

$0=2^a-2$, $2^a=2=2^1$ $\therefore a=1$

$\therefore a-b=1-(-2)=3$

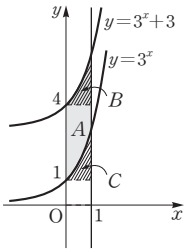
답 3

0361 오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=3^x$, $y=3^x+3$과 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $A+B$이다.

그런데 $y=3^x+3$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 B와 C의 넓이가 같다.

즉 $A+B=A+C$

따라서 구하는 넓이는 $1\cdot 3=3$



답 3

0362 함수 $y=a^x$ $(0<a<1)$의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$3=a^{-1}$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나므로 $b=1$

$\therefore 3(a+b)=3\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)=4$

답 4

0363 $2^a=b$, $2^b=c$, $2^c=d$이므로

$2^{a+b-c}=2^a\cdot 2^b\cdot 2^{-c}$

$=b\cdot c\cdot\frac{1}{d}$

$=\frac{bc}{d}$

답 ③

0364 $A=\sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

$B=2^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

$C=\sqrt[4]{32^{-1}}=\sqrt[4]{\frac{1}{32}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

$\therefore B<C<A$

답 ③

0365 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(a)=-1$에서 $f(-1)=a$

$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+1}-3=1-3=-2$

또 $g(5)=b$에서 $f(b)=5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{b+1}-3=5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{b+1}=8=2^3$

즉 $b+1=-3$이므로 $b=-4$

$\therefore ab=-2\cdot(-4)=8$

답 ④

0366 함수 $f(x)=4^x$ $(-2\le x\le 3)$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $x=3$에서 최댓값 $4^3=64$를 갖는다.

$\therefore M=64$

함수 $g(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}$ $(-2\le x\le 3)$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $x=3$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{8}\right)^1=\frac{1}{8}$을 갖는다.

$\therefore m=\frac{1}{8}$

$\therefore Mm=64\cdot\frac{1}{8}=8$

답 8

0367 $y=4^x-2^{x+1}+k=(2^x)^2-2\cdot 2^x+k$에서

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2t+k=(t-1)^2-1+k$

이때 $0\le x\le 3$이므로 $2^0\le 2^x\le 2^3$에서

$1\le t\le 8$

따라서 주어진 함수는 $t=8$일 때 최댓값 50을 가지므로

$(8-1)^2-1+k=50$

$48+k=50$ $\therefore k=2$

답 ②

0368 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=4\cdot 3^x+36\cdot 3^{-x}$

$\ge 2\sqrt{(4\cdot 3^x)\cdot(36\cdot 3^{-x})}$

$=2\sqrt{144}=24$

이때 등호가 성립하는 경우는

$4\cdot 3^x=36\cdot 3^{-x}$

$3^{2x}=9=3^2$

즉 $2x=2$에서 $x=1$

따라서 주어진 함수는 $x=1$일 때 최솟값 24를 가지므로

$\alpha=1$, $\beta=24$

$\therefore \alpha+\beta=25$

답 ③

0369 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x}=3^{x^2-4}$에서 $3^{3x}=3^{x^2-4}$이므로

$3x=x^2-4$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 해의 곱은

$-1\cdot 4=-4$

답 ③

0370 $a^{2x}-8\cdot a^x+5=0$에서 $a^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-8t+5=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 ㉠의 두 근은 a^α, a^β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a^\alpha\cdot a^\beta=5$, 즉 $a^{\alpha+\beta}=5$

$\alpha+\beta=3$이므로 $a^3=5$

$\therefore a=\sqrt[3]{5}$ ($\because a$는 실수)

답 ①

0371 $\begin{cases}3\cdot 2^x-2\cdot 3^y=6\\ 2^{x-2}-3^{y-1}=-1\end{cases}$에서 $\begin{cases}3\cdot 2^x-2\cdot 3^y=6\\ \frac{1}{4}\cdot 2^x-\frac{1}{3}\cdot 3^y=-1\end{cases}$

이때 $2^x=X$ $(X>0)$, $3^y=Y$ $(Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}3X-2Y=6 & \cdots\cdots ㉠\\ \frac{1}{4}X-\frac{1}{3}Y=-1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$X=8$, $Y=9$

즉 $2^x=8=2^3$, $3^y=9=3^2$이므로

$x=3$, $y=2$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=3^2+2^2=13$

답 **13**

0372 $125^{x-2}<0.2^{4-x}$에서

$5^{3(x-2)}<\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}$, $5^{3x-6}<5^{-4+x}$

이때 밑 5가 $5>1$이므로

$3x-6<-4+x$ $\therefore x<1$

답 ②

0373 $4^x-2^{x+1}-8<0$에서 $(2^x)^2-2\cdot 2^x-8<0$

이때 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-8<0$, $(t+2)(t-4)<0$

$\therefore 0<t<4$ ($\because t>0$)

즉 $0<2^x<4=2^2$이므로 $x<2$

$\therefore A=\{x|x<2,\ x$는 정수$\}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$x^2<2x+3$, $x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$ $\therefore -1<x<3$

$\therefore B=\{x|-1<x<3,\ x$는 정수$\}$

따라서 $A\cap B=\{x|-1<x<2,\ x$는 정수$\}=\{0,\ 1\}$이므로

$n(A\cap B)=2$

답 ①

0374 (i) $0<x<1$일 때, $x^{x^2-5}>x^{4x}$에서 $x^2-5<4x$이므로

$x^2-4x-5<0$, $(x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$일 때, $1>1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

$\therefore x\neq 1$

(iii) $x>1$일 때, $x^{x^2-5}>x^{4x}$에서 $x^2-5>4x$이므로

$x^2-4x-5>0$, $(x+1)(x-5)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>5$

그런데 $x>1$이므로 $x>5$

(i), (ii), (iii)에서 $0<x<1$ 또는 $x>5$이므로

$\alpha+\beta=1+5=6$

답 6

0375 $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1}<32<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-9}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3(2x+1)}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-9}$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$3x-9<-5<6x+3$

(i) $3x-9<-5$에서

$3x<4$ $\therefore x<\frac{4}{3}$

(ii) $-5<6x+3$에서

$6x>-8$ $\therefore x>-\frac{4}{3}$

(i), (ii)의 공통 범위는 $-\frac{4}{3}<x<\frac{4}{3}$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

답 ④

0376 $4^x-2^{x+3}+2a-6\geq 0$에서 $(2^x)^2-8\cdot 2^x+2a-6\geq 0$

이때 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-8t+2a-6\geq 0$

$\therefore (t-4)^2+2a-22\geq 0$

위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$2a-22\geq 0$ $\therefore a\geq 11$

따라서 실수 a의 최솟값은 11이다.

답 **11**

0377 자동차의 중고가는 구입 후 1년마다 20 %씩 떨어지므로 중고가는 1년 전의 중고가의 $\frac{4}{5}$가 된다.

최소 n년 후 자동차의 중고가가 1024만 원 이하가 된다고 하면

$2500\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n\leq 1024$

$\left(\frac{4}{5}\right)^n\leq\frac{1024}{2500}$, $\left(\frac{4}{5}\right)^n\leq\frac{256}{625}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^4$

밑 $\frac{4}{5}$가 $0<\frac{4}{5}<1$이므로 $n\geq 4$

따라서 자동차의 중고가가 1024만 원 이하가 되는 것은 구입한 날로부터 최소 4년 후이다.

답 ②

0378 $y=2^x\cdot 5^{-x}+1=2^x\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+1=\left(\frac{2}{5}\right)^x+1$

이때 밑 $\frac{2}{5}$가 $0<\frac{2}{5}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이다. ㉮

따라서 $-1\leq x\leq 1$일 때

$x=-1$에서 최댓값 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}+1=\frac{7}{2}$, ㉯

$x=1$에서 최솟값 $\left(\frac{2}{5}\right)^1+1=\frac{7}{5}$을 갖는다. ㉰

따라서 치역은 $\left\{y\middle|\frac{7}{5}\leq y\leq\frac{7}{2}\right\}$이므로

$a=\frac{7}{5}$, $b=\frac{7}{2}$

$\therefore ab=\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{10}$ ㉱

답 $\frac{49}{10}$

단계	채점요소	배점
㉮	함수 $y=2^x\cdot 5^{-x}+1$이 감소하는 함수임을 알아내기	30 %
㉯	최댓값 구하기	30 %
㉰	최솟값 구하기	30 %
㉱	치역을 구하고 ab의 값 구하기	10 %

0379 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \geq \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$에서 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2$

$\therefore A = \{x \mid x \leq 2\}$ ..... ㉮

$8^{x^2+2x-4} \leq 4^{x^2+x}$에서 $2^{3(x^2+2x-4)} \leq 2^{2(x^2+x)}$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$3(x^2+2x-4) \leq 2(x^2+x)$

$x^2+4x-12 \leq 0, \ (x+6)(x-2) \leq 0$

$\therefore -6 \leq x \leq 2$

$\therefore B = \{x \mid -6 \leq x \leq 2\}$ ..... ㉯

$\therefore A \cap B = \{x \mid -6 \leq x \leq 2\}$ ..... ㉰

답 $\{x \mid -6 \leq x \leq 2\}$

단계	채점요소	배점
㉮	집합 A 구하기	40 %
㉯	집합 B 구하기	40 %
㉰	집합 $A \cap B$ 구하기	20 %

0380 $4^x - m \cdot 2^x + n < 0$에서 $(2^x)^2 - m \cdot 2^x + n < 0$ ..... ㉠

이때 $2^x = t \ (t>0)$로 놓으면

$t^2 - mt + n < 0$ ..... ㉡

㉠의 해가 $1<x<3$이므로 $2^1 < 2^x < 2^3$, 즉 $2<t<8$ ..... ㉯

따라서 ㉡의 해가 $2<t<8$이므로

$(t-2)(t-8)<0, \ t^2-10t+16<0$

따라서 $m=10, \ n=16$이므로 ..... ㉰

$mn = 10 \cdot 16 = 160$ ..... ㉱

답 160

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 부등식을 $2^x=t$로 놓고 식 세우기	30 %
㉯	t의 값의 범위 구하기	30 %
㉰	m, n의 값 구하기	30 %
㉱	mn의 값 구하기	10 %

0381 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3k} \leq 4^{2-kx}$에서

$2^{-x^2-3k} \leq 2^{4-2kx}$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$-x^2-3k \leq 4-2kx$

$\therefore x^2-2kx+3k+4 \geq 0$ ..... ㉠ ㉮

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2-2kx+3k+4=0$의 판별식 $D \leq 0$이어야 한다. ..... ㉯

$\frac{D}{4} = k^2-(3k+4) \leq 0$

$k^2-3k-4 \leq 0, \ (k+1)(k-4) \leq 0$

$\therefore -1 \leq k \leq 4$ ..... ㉰

따라서 실수 k의 최댓값은 4이다. ..... ㉱

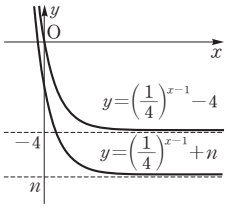
답 4

단계	채점요소	배점
㉮	x에 대한 이차부등식 세우기	30 %
㉯	㉮의 부등식이 항상 성립할 조건 알아내기	30 %
㉰	k의 값의 범위 구하기	30 %
㉱	k의 최댓값 구하기	10 %

0382 $y = 2^{-2x+2} + n$에서

$y = 2^{-2(x-1)} + n$

$\therefore y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} + n$ ..... ㉠



㉠의 그래프가 제1사분면을 지나지 않도록 하는 상수 n의 값이 최대가 되는 경우는 오른쪽 그림과 같이 ㉠의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지날 때이다.

$0 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + n$

$0 = 4 + n \quad \therefore n = -4$

따라서 n의 최댓값은 -4이다.

답 -4

0383 $f(x) = |x-1| + 2$로 놓으면 $-1 \leq x \leq 2$에서

$-2 \leq x-1 \leq 1, \ 0 \leq |x-1| \leq 2, \ 2 \leq |x-1|+2 \leq 4$

$\therefore 2 \leq f(x) \leq 4$

(i) $a>1$일 때

$y = a^{f(x)}$은 $f(x)=4$일 때 최댓값을 가지므로

$a^4 = \frac{1}{4}, \ a^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2} \ (\because a>0)$

그런데 이 값은 $a<1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<1$일 때

$y = a^{f(x)}$은 $f(x)=2$일 때 최댓값을 가지므로

$a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \ (\because a>0)$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{2}$이고 $f(x)=4$일 때 최소이므로 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$이다.

답 $\frac{1}{16}$

0384 $2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때 $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=4^x+4^{-x}+6(2^x+2^{-x})+3$

$=(t^2-2)+6t+3$

$=t^2+6t+1$

$=(t+3)^2-8$ ····· ㉠

$t\geq 2$이므로 ㉠은 $t=2$일 때 최솟값 $(2+3)^2-8=17$을 갖는다.

$t=2$일 때 $x=0$이므로 $a=0$, $b=17$

$\therefore a+b=17$

답 **17**

0385 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(a+3, c)$가 함수 $y=3^x$의 그래프 위에 있으므로

$b=3^a$, $c=3^{a+3}=3^a\cdot 3^3=27b$ $\therefore \dfrac{c}{b}=27$ ····· ㉠

또한 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(a+3, c)$와 원점을 지나는 직선을 $y=kx$ $(k>0)$라 하면

$b=ak$, $c=k(a+3)$

$\therefore \dfrac{c}{b}=\dfrac{k(a+3)}{ak}=\dfrac{a+3}{a}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+3}{a}=27$이므로

$a+3=27a$

$26a=3$ $\therefore a=\dfrac{3}{26}$

따라서 $b=3^a=3^{\frac{3}{26}}$, $c=27b=27\cdot 3^{\frac{3}{26}}=3^{\frac{81}{26}}$이므로

$\log_3 b=\dfrac{3}{26}$, $\log_3 c=\dfrac{81}{26}$

$\therefore \dfrac{\log_3 bc}{a}=\dfrac{\log_3 b+\log_3 c}{a}$

$=\dfrac{\frac{3}{26}+\frac{81}{26}}{\frac{3}{26}}$

$=28$

답 **28**

04 로그함수

교과서 문제 정복하기

본문 51쪽

0386 $2-x>0$에서 $x<2$
따라서 정의역은 $\{x|x<2\}$ 답 $\{x|x<2\}$

0387 $2x>0$에서 $x>0$
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$ 답 $\{x|x>0\}$

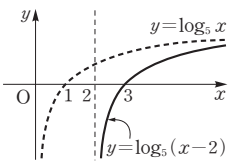
0388 함수 $y=10^x$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|y>0\}$이다.
로그의 정의로부터 $x=\log y$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\log x$

답 $y=\log x$

0389 함수 $y=3\cdot 2^{x-1}$에서 $2^{x-1}=\frac{y}{3}$
정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|y>0\}$이다.
로그의 정의로부터
$x-1=\log_2 \frac{y}{3}$ $\therefore x=\log_2 \frac{y}{3}+1$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\log_2 \frac{x}{3}+1$

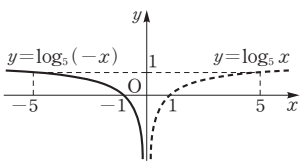
답 $y=\log_2 \frac{x}{3}+1$

0390 함수 $y=\log_5(x-2)$의 그래프는 함수 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선은 직선 $x=2$이다.



답 풀이 참조

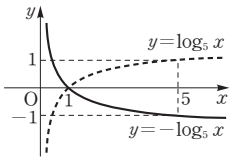
0391 함수 $y=\log_5(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_5 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 점근선은 직선 $x=0$이다.

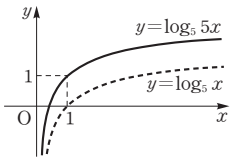
답 풀이 참조

0392 함수 $y=-\log_5 x$의 그래프는 함수 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선은 직선 $x=0$이다.



답 풀이 참조

0393 함수 $y=\log_5 5x$
즉 $y=\log_5 x+1$의 그래프는 함수 $y=\log_5 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선은 직선 $x=0$이다.



답 풀이 참조

0394 $2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$
함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$\log_2 10>\log_2 9$ $\therefore \log_2 10>2\log_2 3$

답 $\log_2 10>2\log_2 3$

0395 $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27=\log_{\frac{1}{2}}(3^3)^{\frac{1}{3}}=\log_{\frac{1}{2}} 3$
$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 7=\log_{\frac{1}{2}} 7^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{7}$
함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
$\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{7}$ $\therefore \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27<\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 7$

답 $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27<\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 7$

0396 $\log_9 16=\log_{3^2} 4^2=\log_3 4$
함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로
$\log_3 2<\log_3 4$ $\therefore \log_3 2<\log_9 16$

답 $\log_3 2<\log_9 16$

0397 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 최댓값은 $x=64$일 때 $y=\log_2 64=6$,
최솟값은 $x=1$일 때 $y=\log_2 1=0$

답 최댓값 : 6, 최솟값 : 0

0398 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 최댓값은 $x=-\frac{1}{2}$일 때
$y=\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$,
최솟값은 $x=7$일 때 $y=\log_{\frac{1}{2}}(7+1)=\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$

답 최댓값 : 1, 최솟값 : -3

0399 함수 $y=-\log_5(x-2)+3$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 최댓값은 $x=7$일 때 $y=-\log_5(7-2)+3=2$,
최솟값은 $x=127$일 때 $y=-\log_5(127-2)+3=0$

답 **최댓값 : 2, 최솟값 : 0**

0400 진수의 조건에서 $2x-5>0$ $\therefore x>\frac{5}{2}$ …… ㉠
$\log_3(2x-5)=2$에서 $2x-5=3^2$
$2x=14$ $\therefore x=7$
$x=7$은 ㉠을 만족시키므로 해이다.

답 $x=7$

0401 진수의 조건에서 $x+1>0$ $\therefore x>-1$ …… ㉠
$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=2$에서 $x+1=\left(\frac{1}{3}\right)^2$
$\therefore x=-\frac{8}{9}$
$x=-\frac{8}{9}$은 ㉠을 만족시키므로 해이다.

답 $x=-\frac{8}{9}$

0402 밑의 조건에서 $x+1>0$, $x+1\neq1$
$\therefore x>-1$, $x\neq0$ …… ㉠
$\log_{x+1}9=2$에서 $(x+1)^2=9$
$x+1=3$ 또는 $x+1=-3$
$\therefore x=2$ 또는 $x=-4$
㉠에 의하여 $x=2$

답 $x=2$

0403 진수의 조건에서
$x-1>0$, $2x-3>0$ $\therefore x>\frac{3}{2}$ …… ㉠
$\log_2(x-1)=\log_2(2x-3)$에서
$x-1=2x-3$ $\therefore x=2$
$x=2$는 ㉠을 만족시키므로 해이다.

답 $x=2$

0404 진수의 조건에서
$x>0$, $x-3>0$ $\therefore x>3$ …… ㉠
$\log x+\log(x-3)=1$에서
$\log x(x-3)=\log 10$
$x(x-3)=10$, $x^2-3x-10=0$
$(x+2)(x-5)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$
㉠에 의하여 $x=5$

답 $x=5$

0405 진수의 조건에서
$x-1>0$, $x+2>0$ $\therefore x>1$ …… ㉠
$\log_2(x-1)=2-\log_2(x+2)$에서
$\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$
$\log_2(x-1)(x+2)=\log_2 2^2$
$(x-1)(x+2)=4$, $x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$
㉠에 의하여 $x=2$

답 $x=2$

0406 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠
$\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $t^2-4t+3=0$
$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$
즉 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=3$
$\therefore x=3$ 또는 $x=27$
이것은 ㉠을 만족시키므로 해이다.

답 $x=3$ 또는 $x=27$

0407 진수의 조건에서 $x+4>0$ $\therefore x>-4$ …… ㉠
$\log_2(x+4)<3$에서 $\log_2(x+4)<\log_2 2^3$
밑이 1보다 크므로 $x+4<8$ $\therefore x<4$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-4<x<4$

답 $-4<x<4$

0408 진수의 조건에서 $x-1>0$ $\therefore x>1$ …… ㉠
$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>2$에서 $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$
밑이 1보다 작으므로 $x-1<\frac{1}{9}$ $\therefore x<\frac{10}{9}$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<\frac{10}{9}$

답 $1<x<\frac{10}{9}$

0409 진수의 조건에서
$2x-1>0$, $3x+1>0$ $\therefore x>\frac{1}{2}$ …… ㉠
$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\geq\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$에서 밑이 1보다 작으므로
$2x-1\leq3x+1$ $\therefore x\geq-2$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>\frac{1}{2}$

답 $x>\frac{1}{2}$

0410 진수의 조건에서
$2x>0$, $x+2>0$ $\therefore x>0$ …… ㉠
$\log_2 2x<\log_2(x+2)$에서 밑이 1보다 크므로
$2x<x+2$ $\therefore x<2$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<2$

답 $0<x<2$

0411 진수의 조건에서

$x>0$, $7-x>0$ $\therefore 0<x<7$ …… ㉠

$\log x+\log(7-x)<1$에서

$\log x(7-x)<\log 10$

밑이 1보다 크므로 $x(7-x)<10$

$x^2-7x+10>0$, $(x-2)(x-5)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<2$ 또는 $5<x<7$

답 $0<x<2$ 또는 $5<x<7$

유형 익히기 본문 52~59쪽

0412 $f(1)=3$이므로 $f(1)=\log_a 4+1=3$

$\log_a 4=2$, $a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$\therefore f(x)=\log_2(3x+1)+1$

$f(0)=\log_2 1+1=0+1=1$

$f(5)=\log_2 16+1=4+1=5$

$\therefore f(0)+f(5)=1+5=6$

답 ③

0413 $f(-4)=3^{-4}=\frac{1}{81}$이므로

$(g\circ f)(-4)=g(f(-4))=g\left(\frac{1}{81}\right)$

$=\log_{\frac{1}{9}}\frac{1}{81}=\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{9}\right)^2=2$

답 ⑤

참고 함수 $f(x)=3^x$의 치역(양수 전체의 집합)은 $g(x)=\log_{\frac{1}{9}}x$의 정의역(양수 전체의 집합)에 포함되므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 정의된다.

0414 $f(75)-f(25)=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{75}-\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{25}$

$=\log_{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{25}}=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{75}{25}}$

$=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}$

$=\log_{3^{-1}}3^{\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{2}$

답 ②

0415 ④ $y=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{x}=\log_a x$이고 $0<a<1$이므로 $x>0$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

답 ④

0416 함수 $y=\log_5(x+a)+b$의 그래프의 점근선은 직선 $x=-a$이므로

$-a=2$ $\therefore a=-2$

$\therefore y=\log_5(x-2)+b$ …… ㉠

또 x절편이 7이므로 $x=7$, $y=0$을 ㉠의 식에 대입하면

$0=\log_5(7-2)+b$, $0=1+b$ $\therefore b=-1$

$\therefore a+b=-2+(-1)=-3$

답 -3

0417 ㄱ. 지수함수 $y=a^x$의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나고, 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 점 $(1, 0)$을 지나므로 주어진 그림에서 두 그래프의 교점의 좌표는 $(1, 1)$이 아니다. (거짓)

ㄴ. $y=a^x$과 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 두 함수 모두 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ㄴ

0418 $y=\log_2(2x+4)=\log_2 2(x+2)=\log_2(x+2)+1$

이므로 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore m=-2$, $n=1$

$\therefore m+n=-1$

답 -1

0419 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_{\frac{1}{4}}(x-m)+n$

이 그래프의 점근선이 $x=-3$이므로 $m=-3$

$\therefore y=\log_{\frac{1}{4}}(x+3)+n$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=\log_{\frac{1}{4}}2+n$

$0=-\frac{1}{2}+n$ $\therefore n=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{m}{n}=\frac{-3}{\frac{1}{2}}=-6$

답 -6

0420 함수 $y=\log_2 4x$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=\log_2 4x$

$y=\log_2 4x-3=\log_2\frac{4x}{2^3}$ $\therefore y=\log_2\frac{x}{2}$

이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 그래프의 식은

$-y=\log_2 \frac{x}{2}$, $y=-\log_2 \frac{x}{2}$

$\therefore y=\log_2 \frac{2}{x}$

$\therefore a=2$

답 2

0421 ㄱ. $y=\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log_2(x-3)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\log_2 2x=\log_2 x+1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동 또는 대칭이동하여 $y=\log_2 x$의 그래프와 겹칠 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

0422 $A=-\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{2}} 6$

$B=2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{5}\right)^2=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{25}$

$C=-3\log_{\frac{1}{2}} 3=\log_{\frac{1}{2}} 3^{-3}=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27}$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이고 진수를 비교하면 $\frac{1}{27}<\frac{1}{25}<6$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} 6<\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{25}<\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27}$

$\therefore A<B<C$

답 ①

0423 (1) 로그의 밑을 $\frac{1}{3}$로 통일하면

$A=\log_3 \sqrt{2}=-\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}=\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$B=\log_{\frac{1}{3}} 4$, $C=\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{10}$

이때 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이고 진수를 비교하면

$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{10}<4$이므로

$\log_{\frac{1}{3}} 4<\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{10}<\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore B<C<A$

(2) 로그의 밑을 2로 통일하면

$A=5=\log_2 2^5=\log_2 32$

$B=\log_2 7$

$C=\log_4 25=\log_{2^2} 5^2=\frac{2}{2}\log_2 5=\log_2 5$

이때 밑 2가 $2>1$이고 진수를 비교하면 $5<7<32$이므로

$\log_2 5<\log_2 7<\log_2 32$

$\therefore C<B<A$

답 (1) $B<C<A$ (2) $C<B<A$

0424 $1<x<2$의 각 변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 1<\log_2 x<\log_2 2$ $\therefore 0<\log_2 x<1$

$A-B=\log_2 x-(\log_2 x)^2=\log_2 x(1-\log_2 x)$

이때 $0<\log_2 x<1$이므로 $1-\log_2 x>0$

$\therefore A-B>0$ $\therefore A>B$ ····· ㉠

$C=\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}$

이때 $0<\log_2 x<1$이므로 $\frac{1}{\log_2 x}>1$, 즉 $C>1$

$\therefore A<C$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $B<A<C$

답 $B<A<C$

0425 $b<a<1$의 각 변에 밑이 $a(0<a<1)$인 로그를 취하면

$\log_a b>\log_a a>\log_a 1$ $\therefore \log_a b>1$

$b<a<1$의 각 변에 밑이 $b(0<b<1)$인 로그를 취하면

$\log_b b>\log_b a>\log_b 1$ $\therefore 0<\log_b a<1$

$\log_a \frac{a}{b}=\log_a a-\log_a b=1-\log_a b<0$ ($\because \log_a b>1$)

$\therefore \log_a \frac{a}{b}<\log_b a<\log_a b$

$\therefore C<B<A$

답 ⑤

0426 주어진 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$a^{-1}=2$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이므로 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는

$g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

$\therefore g(4)=\log_{\frac{1}{2}} 4=\log_{2^{-1}} 2^2=-2$

답 -2

0427 (1) 함수 $y=2^{-x+3}-1$의 치역은 $\{y|y>-1\}$

$y=2^{-x+3}-1$에서 $y+1=2^{-x+3}$

로그의 정의로부터 $\log_2(y+1)=-x+3$

$\therefore x=-\log_2(y+1)+3$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$y=-\log_2(x+1)+3$, 즉 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+3$이고

정의역은 $\{x|x>-1\}$이다.

(2) $y=\log_2(x-4)+3$에서 $y-3=\log_2(x-4)$

로그의 정의로부터 $x-4=2^{y-3}$

$\therefore x=2^{y-3}+4$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$y=2^{x-3}+4$

답 (1) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+3$ (2) $y=2^{x-3}+4$

0428 함수 $f(x)=\log_3 x$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(\alpha)=2$, $g(\beta)=7$이므로

$f(2)=\alpha$, $f(7)=\beta$ …… ㉠

$g(\alpha+\beta)=k$로 놓으면 $f(k)=\alpha+\beta$이고

$f(k)=\alpha+\beta$

$=f(2)+f(7)$ ($\because$ ㉠)

$=\log_3 2+\log_3 7$

$=\log_3(2\cdot7)$

$=\log_3 14$

즉 $f(k)=\log_3 14=\log_3 k$

$\therefore k=14$

답 **14**

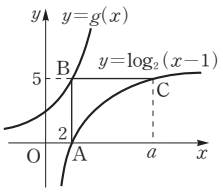
0429 $y=\log_2(x-1)$에서 $x-1=2^y$

$\therefore x=2^y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^x+1$

$\therefore g(x)=2^x+1$

따라서 점 A의 좌표는 (2, 0), 점 B의 좌표는 (2, 5)이다.



$\therefore \overline{AB}=5$

점 C의 좌표를 $(a, 5)$라 하면

$\log_2(a-1)=5$

$a-1=2^5$ $\therefore a=33$

$\therefore \overline{BC}=33-2=31$

$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}=5+31=36$

답 **36**

0430 세 점 P, M, Q의 y좌표는 각각 $\log_5 2$, $\log_5 a$, $\log_5 18$이다. 점 M이 선분 PQ의 중점이므로

$$\log_5 a=\frac{\log_5 2+\log_5 18}{2}$$

$2\log_5 a=\log_5 2+\log_5 18$

$\log_5 a^2=\log_5(2\cdot18)=\log_5 36$

즉 $a^2=36$이므로

$a=6$ ($\because a>0$)

답 **6**

0431 점 C의 좌표를 $(k, 0)$이라 하면 $\overline{CD}=4$이므로 점 D의 좌표는 $(k, 4)$이다.

$y=\log_2 x$의 그래프가 점 D를 지나므로

$4=\log_2 k$

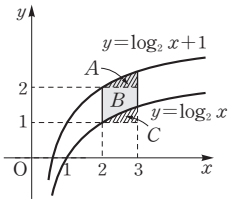
$\therefore k=2^4=16$

따라서 $\overline{BC}=4$이므로 점 B의 x좌표는

$k-4=16-4=12$

답 **12**

0432 $y=\log_2 x+1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



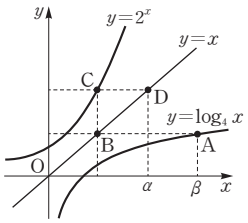
따라서 오른쪽 그림에서 $A=C$이므로 구하는 넓이는

$A+B=B+C$

$=(3-2)\cdot(2-1)=1$

답 **1**

0433 오른쪽 그림에서



A$(\beta, \log_4\beta)$이므로

B$(\log_4\beta, \log_4\beta)$ ……… ㉮

점 B와 점 C는 x좌표가 같으므로

C$(\log_4\beta, 2^{\log_4\beta})$

점 C와 점 D는 y좌표가 같으므로

D$(\alpha, 2^{\log_4\beta})$

점 D는 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\alpha=2^{\log_4\beta}=\beta^{\log_4 2}=\beta^{\frac{1}{2}}$ ……… ㉯

즉 $\alpha^2=\beta$이므로 $\alpha+\beta=12$에 대입하면

$\alpha+\alpha^2=12$, $\alpha^2+\alpha-12=0$

$(\alpha+4)(\alpha-3)=0$ $\therefore \alpha=3$ ($\because \alpha>0$) ……… ㉰

따라서 $\beta=3^2=9$이므로 $\alpha\beta=27$ ……… ㉱

답 **27**

단계	채점요소	배점
㉮	점 B의 좌표를 β로 나타내기	10 %
㉯	$\alpha=\beta^{\frac{1}{2}}$임을 알기	50 %
㉰	α의 값 구하기	30 %
㉱	β의 값, $\alpha\beta$의 값 구하기	10 %

0434 $f(x)=x^2-2x+8$로 놓으면

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+8)=\log_{\frac{1}{2}} f(x)$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 주어진 함수는 $f(x)$가 최대일 때 최솟값을 갖고 $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $f(x)=x^2-2x+8=(x-1)^2+7$이므로

$2\le x\le6$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=8$, 최댓값은 $f(6)=32$이다. 따라서 주어진 함수의

최댓값 $M=\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$

최솟값 $m=\log_{\frac{1}{2}} 32=-5$

$\therefore M-m=-3-(-5)=2$

답 ④

0435 (1) 함수 $y=\log_3(x+3)+k$ $(0\le x\le 6)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $x=6$에서 최댓값을 갖는다. 그런데 최댓값이 7이므로

$7=\log_3 9+k$

$7=2+k$ $\quad\therefore k=5$

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+k$ $(-1\le x\le 2)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $x=-1$에서 최댓값을 갖는다. 그런데 최댓값이 3이므로

$3=\log_{\frac{1}{2}}1+k$ $\quad\therefore k=3$

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$ $(-1\le x\le 2)$은 $x=2$에서 최솟값을 갖고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{2}}4+3=-2+3=1$

답 (1) **5** (2) **1**

0436 (1) 함수 $y=\log_2(x^2-6x+11)$은 $x^2-6x+11$이 최대일 때 최대가 되고, 최소일 때 최소가 된다.

$x^2-6x+11=(x-3)^2+2$이므로 $x^2-6x+11$은 $x=3$에서 최솟값 2를 갖고, 최댓값은 없다.

따라서 함수 $y=\log_2(x^2-6x+11)$은 $x=3$에서 최솟값 $\log_2 2=1$을 갖고, 최댓값은 없다.

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4x+13)$은 $x^2+4x+13$이 최대일 때 최소가 되고, 최소일 때 최대가 된다.

$x^2+4x+13=(x+2)^2+9$이므로 $x^2+4x+13$은 $x=-2$에서 최솟값 9를 갖고, 최댓값은 없다.

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4x+13)$은 $x=-2$에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}9=-2$를 갖고, 최솟값은 없다.

답 (1) **최솟값 : 1** (2) **최댓값 : −2**

0437 진수의 조건에서 $x+1>0$, $3-x>0$

$\therefore -1<x<3$ ..... ㉮

$y=\log_a(x+1)+\log_a(3-x)$

$=\log_a(x+1)(3-x)$

$=\log_a(-x^2+2x+3)$ ..... ㉯

이때 진수는 $-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4\le 4$이므로

$-1<x<3$에서 진수의 최댓값은 4이고 최솟값은 없다.

그런데 주어진 함수가 최솟값을 가지므로

$0<a<1$이고, ... ㉰

최솟값이 -4이므로 $\log_a 4=-4$

$a^{-4}=4$, $a^4=\frac{1}{4}$

$\therefore a^2=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because 0<a<1)$ ..... ㉱

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	진수의 조건 구하기	20 %
㉯	함수의 식 간단히 하기	30 %
㉰	a의 조건 구하기	20 %
㉱	a의 값 구하기	30 %

0438 $\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면 $1\le x\le 8$에서

$\log_{\frac{1}{2}}8\le\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}1$ $\quad\therefore -3\le t\le 0$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+4t+5=(t+2)^2+1$ ..... ㉠

따라서 ㉠은 $-3\le t\le 0$에서

$t=-2$일 때 최솟값 1,

$t=0$일 때 최댓값 $(0+2)^2+1=5$를 갖는다.

따라서 $M=5$, $m=1$이므로 $Mm=5$

답 **5**

0439 $y=(\log_2 4x)\left(\log_2\frac{2}{x^2}\right)$

$=(\log_2 4+\log_2 x)(\log_2 2-\log_2 x^2)$

$=(2+\log_2 x)(1-2\log_2 x)$

이때 $\log_2 x=t$로 놓으면

$y=(2+t)(1-2t)=-2t^2-3t+2$

$=-2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$ ..... ㉠

또 $\frac{1}{4}\le x\le 2$에서

$\log_2\frac{1}{4}\le\log_2 x\le\log_2 2$ $\quad\therefore -2\le t\le 1$

따라서 ㉠은 $-2\le t\le 1$에서

$t=-\frac{3}{4}$일 때 최댓값 $\frac{25}{8}$,

$t=1$일 때 최솟값 $-2\left(1+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}=-3$을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{25}{8}+(-3)=\frac{1}{8}$

답 ①

0440 $x^{\log 5}=5^{\log x}$이므로

$y=5^{2\log x}-(x^{\log 5}+5^{\log x})+7=(5^{\log x})^2-2\cdot 5^{\log x}+7$

이때 $5^{\log x}=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2t+7=(t-1)^2+6$

따라서 이 함수는 $t=1$일 때 최솟값을 가지므로

$5^{\log x}=1$에서

$\log x=0$, 즉 $x=1$ $\quad\therefore a=1$

또 최솟값은 6이므로 $b=6$

$\therefore a+b=1+6=7$

답 **7**

0441 $y=(\log_3 x)^2+a\log_{27} x^2+b$

$=(\log_3 x)^2+\frac{2}{3}a\log_3 x+b$

이때 $\log_3 x=t$로 놓으면

$y=t^2+\frac{2}{3}at+b$ …… ㉠

…… 가

㉠이 $x=\frac{1}{3}$, 즉 $t=\log_3\frac{1}{3}=-1$일 때 최솟값 1을 가지므로

$y=(t+1)^2+1=t^2+2t+2$ …… ㉡

…… 나

㉠, ㉡이 일치해야 하므로

$\frac{2}{3}a=2,\ b=2 \quad \therefore a=3,\ b=2$

$\therefore a+b=5$

…… 다

답 **5**

단계	채점요소	배점
가	주어진 함수를 $\log_3 x=t$로 치환하여 나타내기	30%
나	주어진 조건으로부터 y를 t에 대한 함수로 나타내기	50%
다	$a+b$의 값 구하기	20%

0442 $\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)+\log_2\left(y+\frac{9}{x}\right)$

$=\log_2\left(xy+\frac{9}{xy}+10\right)$ …… ㉠

이고, 밑 2가 $2>1$이므로 ㉠은 $xy+\frac{9}{xy}+10$이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$xy+\frac{9}{xy}+10\geq 2\sqrt{xy\cdot\frac{9}{xy}}+10$

$=2\cdot 3+10=16$ (단, 등호는 $xy=3$일 때 성립)

이므로 $xy+\frac{9}{xy}+10$의 최솟값은 16이다.

따라서 ㉠의 최솟값은

$\log_2 16=4$

답 ④

0443 (1) $2\log_5 x+\log_x 125=2\log_5 x+3\log_x 5$

$=2\log_5 x+\frac{3}{\log_5 x}$

$x>1$에서 $\log_5 x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2\log_5 x+\frac{3}{\log_5 x}\geq 2\sqrt{2\log_5 x\cdot\frac{3}{\log_5 x}}$

$=2\sqrt{6}$

$\left(\text{단, 등호는 } \log_5 x=\frac{\sqrt{6}}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{6}$이다.

(2) $\log_3 x+\log_3 y=\log_3 xy$ …… ㉠

이고, 밑 3이 $3>1$이므로 ㉠은 xy가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+4y\geq 2\sqrt{4xy}$ (단, 등호는 $x=4y$일 때 성립)

이때 $x+4y=12$이므로

$12\geq 2\sqrt{4xy},\ 6\geq\sqrt{4xy}$

$36\geq 4xy \quad \therefore xy\leq 9$

따라서 xy의 최댓값은 9이므로 ㉠의 최댓값은

$\log_3 9=2$

답 (1) $2\sqrt{6}$ (2) **2**

0444 $y=x^{2-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=(2-\log x)\log x$

$=-(\log x)^2+2\log x$

이때 $\log x=t$로 놓으면

$\log y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

$1\leq x\leq 1000$에서 $\log 1\leq\log x\leq\log 1000$, 즉 $0\leq t\leq 3$이므로

$\log y$는 $t=1$일 때 최댓값 1, $t=3$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

즉 $\log y=1$에서 $y=10$

$\log y=-3$에서 $y=10^{-3}$

따라서 주어진 함수의 최댓값 $M=10$, 최솟값 $m=10^{-3}$이므로

$Mm=10\cdot 10^{-3}=10^{-2}$

답 10^{-2}

0445 $y=\frac{x^8}{x^{\log_3 x}}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 x^8-\log_3 x^{\log_3 x}=8\log_3 x-(\log_3 x)^2$

이때 $\log_3 x=t$로 놓으면

$\log_3 y=8t-t^2=-(t-4)^2+16$

따라서 $\log_3 y$는 $t=4$일 때 최댓값 16을 갖는다.

즉 $\log_3 x=4$에서 $x=3^4=m$

$\log_3 y=16$에서 $y=3^{16}=n$

$\therefore m+n=3^4+3^{16}=3^4(3^{12}+1)$

답 $3^4(3^{12}+1)$

0446 진수의 조건에서 $x-2>0,\ x-5>0$

$\therefore x>5$ …… ㉠

$\log_4(x-2)+\log_{\frac{1}{4}}(x-5)=\frac{1}{2}$에서

$\log_4(x-2)-\log_4(x-5)=\log_4 4^{\frac{1}{2}}$

$\log_4(x-2)=\log_4(x-5)+\log_4 2$

$\log_4(x-2)=\log_4 2(x-5)$

즉 $x-2=2(x-5)$ $\therefore x=8$

$x=8$은 ㉠을 만족시키므로 해이다.

답 ④

0447 (1) 진수의 조건에서 $x>0$, $4x-4>0$

$\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_{\sqrt{2}} x=\log_2(4x-4)$에서

$\log_2 x^2=\log_2(4x-4)$

즉 $x^2=4x-4$, $(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

$x=2$는 ㉠을 만족시키므로 해이다.

(2) 진수의 조건에서 $x-2>0$, $2x-1>0$

$\therefore x>2$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{\frac{1}{4}}(2x-1)$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{(\frac{1}{2})^2}(2x-1)$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

$2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2=\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

즉 $(x-2)^2=2x-1$, $x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=5$

이때 ㉠에 의하여 $x=5$

(3) 진수의 조건에서 $x+3>0$, $x+7>0$

$\therefore x>-3$ …… ㉠

$\log_3(x+3)-\log_9(x+7)=1$에서

$\log_3(x+3)-\log_{3^2}(x+7)=1$

$\log_3(x+3)-\frac{1}{2}\log_3(x+7)=1$

$2\log_3(x+3)-\log_3(x+7)=2$

$\log_3(x+3)^2=\log_3(x+7)+\log_3 3^2=\log_3 9(x+7)$

즉 $(x+3)^2=9(x+7)$, $x^2-3x-54=0$

$(x+6)(x-9)=0$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=9$

이때 ㉠에 의하여 $x=9$

답 (1) $x=2$ (2) $x=5$ (3) $x=9$

0448 밑과 진수의 조건에서

$x^2+1>0$, $x^2+1\neq 1$, $x+7>0$, $x+7\neq 1$, $x-1>0$

$\therefore x>1$ …… ㉠ ㉮

(i) $x^2+1=x+7$일 때

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 $x=3$ ㉯

(ii) $x-1=1$일 때, $x=2$

$x=2$는 ㉠을 만족시키므로 근이다. ㉰

(i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은 $2+3=5$ ㉱

답 5

단계	채점요소	배점
㉮	밑과 진수의 조건 구하기	30 %
㉯	밑이 같을 경우의 근 구하기	40 %
㉰	진수가 1일 경우의 근 구하기	20 %
㉱	모든 근의 합 구하기	10 %

0449 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_3 x-\log_9 x=2(\log_3 x)(\log_9 x)$에서

$\log_3 x-\log_{3^2} x=2(\log_3 x)(\log_{3^2} x)$

$\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3 x=2\log_3 x\cdot\frac{1}{2}\log_3 x$

$\frac{1}{2}\log_3 x=(\log_3 x)^2$

이때 $\log_3 x=t$로 놓으면

$\frac{1}{2}t=t^2$, $t^2-\frac{1}{2}t=0$, $t\left(t-\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

즉 $\log_3 x=0$ 또는 $\log_3 x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

이 값들은 모두 ㉠을 만족시키므로

$\alpha=1$, $\beta=\sqrt{3}$ 또는 $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=1$ $\therefore \alpha\beta=\sqrt{3}$

답 ③

0450 (1) 진수의 조건에서 $x>0$, $x^6>0$

$\therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^6+5=0$에서

$(\log_2 x)^2-6\log_2 x+5=0$

이때 $\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-6t+5=0$, $(t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

즉 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=5$

$\therefore x=2$ 또는 $x=2^5=32$

이 값들은 모두 ㉠을 만족시키므로

$x=2$ 또는 $x=32$

(2) 진수의 조건에서 $x^2>0$, $x>0$

$\therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_{16} x^2)^2-5\log_{16} x+1=0$에서

$(2\log_{16} x)^2-5\log_{16} x+1=0$

이때 $\log_{16} x=t$로 놓으면 $(2t)^2-5t+1=0$

$4t^2-5t+1=0$, $(4t-1)(t-1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{4}$ 또는 $t=1$

즉 $\log_{16} x=\frac{1}{4}$ 또는 $\log_{16} x=1$

$\therefore x=16^{\frac{1}{4}}=2$ 또는 $x=16$

이 값들은 모두 ㉠을 만족시키므로

$x=2$ 또는 $x=16$

(3) 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(\log_2 2x)\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)=3$에서

$(\log_2 2+\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 2)=3$

$(\log_2 x+1)(\log_2 x-1)=3$

이때 $\log_2 x=t$로 놓으면

$(t+1)(t-1)=3,\ t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

즉 $\log_2 x=-2$ 또는 $\log_2 x=2$

$\therefore x=2^{-2}=\frac{1}{4}$ 또는 $x=2^2=4$

이 값들은 모두 ㉠을 만족시키므로

$x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=4$

답 (1) $x=2$ 또는 $x=32$ (2) $x=2$ 또는 $x=16$

(3) $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=4$

0451 밑과 진수의 조건에서 $x>0,\ x\neq 1$ …… ㉠

$\log_x 9-\log_3 x=1$에서 $\frac{\log_3 9}{\log_3 x}-\log_3 x=1$

$\frac{2}{\log_3 x}-\log_3 x=1$

이때 $\log_3 x=t$로 놓으면 $\frac{2}{t}-t=1$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2+t-2=0,\ (t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=1$

$\therefore x=3^{-2}=\frac{1}{9}$ 또는 $x=3$

이 값들은 모두 ㉠을 만족시키고, $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=3,\ \beta=\frac{1}{9}$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{\frac{1}{9}}=27$

답 27

0452 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_3 x}=\frac{1}{3}x^2$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 \frac{1}{3}x^2$

$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 \frac{1}{3}+\log_3 x^2$

$(\log_3 x)^2=-1+2\log_3 x$

이때 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2=-1+2t,\ t^2-2t+1=0$

$(t-1)^2=0$ $\therefore t=1$

즉 $\log_3 x=1$ $\therefore x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 해이다.

답 ②

0453 (1) 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_3 x}=\frac{27}{x^2}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 \frac{27}{x^2}$

$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 27-\log_3 x^2$

$(\log_3 x)^2=3-2\log_3 x$

이때 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2=3-2t,\ t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

즉 $\log_3 x=-3$ 또는 $\log_3 x=1$

$\therefore x=3^{-3}=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$

이 값들은 모두 ㉠을 만족시키므로

$x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{1-\log x}=\frac{x^2}{100}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{1-\log x}=\log \frac{x^2}{100}$

$(1-\log x)\log x=2\log x-\log 100$

$(\log x)^2+\log x-2=0$

이때 $\log x=t$로 놓으면

$t^2+t-2=0,\ (t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉 $\log x=-2$ 또는 $\log x=1$

$\therefore x=10^{-2}=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$

이 값들은 모두 ㉠을 만족시키므로

$x=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$

답 (1) $x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$ (2) $x=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$

0454 밑의 조건에서 $x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1$

$\begin{cases}\log_x 4-\log_y 2=2\\ \log_x 16+\log_y 8=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\log_x 2-\log_y 2=2\\ 4\log_x 2+3\log_y 2=-1\end{cases}$

이때 $\log_x 2=X,\ \log_y 2=Y$로 놓으면

$\begin{cases}2X-Y=2\\ 4X+3Y=-1\end{cases}$

위의 연립방정식을 풀면 $X=\frac{1}{2},\ Y=-1$

즉 $\log_x 2=\frac{1}{2}$, $\log_y 2=-1$이므로 $x^{\frac{1}{2}}=2$, $y^{-1}=2$

$\therefore x=4,\ y=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \alpha\beta=4\cdot\frac{1}{2}=2$

답 2

0455 진수의 조건에서 $x>0$, $y>0$

$\log_3 x=X$, $\log_2 y=Y$로 놓으면

$$(\log_2 x)(\log_3 y)=\left(\frac{\log_3 x}{\log_3 2}\right)\left(\frac{\log_2 y}{\log_2 3}\right)$$
$$=(\log_3 x)(\log_2 y)$$
$$=XY$$

따라서 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X+Y=4 \\ XY=3 \end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀면

$X=1$, $Y=3$ 또는 $X=3$, $Y=1$

즉 $\log_3 x=1$, $\log_2 y=3$ 또는 $\log_3 x=3$, $\log_2 y=1$

$\therefore x=3,\ y=8$ 또는 $x=27,\ y=2$

그런데 $0<\beta<\alpha$이므로 $\alpha=27$, $\beta=2$

$\therefore \alpha+\beta=29$

답 29

0456 $(\log_2 2x)^2-3\log_2 x^2=0$에서

$(1+\log_2 x)^2-3\cdot 2\log_2 x=0$

$1+2\log_2 x+(\log_2 x)^2-6\log_2 x=0$

$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+1=0$

이때 $\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-4t+1=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 실근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=4$, $\log_2 \alpha\beta=4$

$\therefore \alpha\beta=2^4=16$

답 ④

0457 방정식 $(\log x)^2-k\log x-5=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=100$이다.

이때 $\log x=t$로 놓으면

$t^2-kt-5=0$ …… ㉠ ····· ㉮

㉠의 두 근은 $\log \alpha$, $\log \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log \alpha+\log \beta=k$ ····· ㉯

$\log \alpha\beta=\log 100=k$ $\quad\therefore k=2$ ····· ㉰

답 2

단계	채점요소	배점
㉮	$\log x=t$로 치환하기	40 %
㉯	근과 계수의 관계 이용하기	40 %
㉰	k의 값 구하기	20 %

0458 이차방정식 $x^2-x\log a+2\log a-3=0$이 중근을 가지려면 판별식을 D라 할 때

$D=(\log a)^2-4(2\log a-3)=0$

$(\log a)^2-8\log a+12=0$

이때 $\log a=t$로 놓으면

$t^2-8t+12=0$, $(t-2)(t-6)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=6$

즉 $\log a=2$ 또는 $\log a=6$

$\therefore a=10^2$ 또는 $a=10^6$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 $10^2\cdot 10^6=10^8$

답 ④

0459 방정식 $p(\log x)^2-2p\log x+1=0$에서

$\log x=t$로 놓으면

$pt^2-2pt+1=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log \alpha$, $\log \beta$이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log \alpha+\log \beta=2$ …… ㉡

$(\log \alpha)(\log \beta)=\frac{1}{p}$ …… ㉢

㉡과 $\log \alpha-\log \beta=4$를 연립하여 풀면

$\log \alpha=3$, $\log \beta=-1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $3\cdot(-1)=\frac{1}{p}$ $\quad\therefore p=-\frac{1}{3}$

답 $-\frac{1}{3}$

0460 진수의 조건에서 $6-x>0$, $x+5>0$

$\therefore -5<x<6$ …… ㉠

$\log(6-x)+\log(x+5)\le 1$에서

$\log(6-x)(x+5)\le \log 10$

이때 밑이 1보다 크므로

$(6-x)(x+5)\le 10$, $-x^2+x+30\le 10$

$x^2-x-20\ge 0$, $(x+4)(x-5)\ge 0$

$\therefore x\le -4$ 또는 $x\ge 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-5<x\le -4$ 또는 $5\le x<6$

따라서 $a=-5$, $b=5$이므로 $a+b=0$

답 0

0461 (1) 진수의 조건에서 $x-3>0$

$\therefore x>3$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)>-2$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$x-3<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $x-3<4$

$\therefore x<7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<7$

(2) 진수의 조건에서 $x-1>0$, $5-x^2>0$

$\therefore 1<x<\sqrt{5}$ …… ㉠

$\log_2(x-1)\geq\log_4(5-x^2)$에서

$\log_2(x-1)\geq\log_{2^2}(5-x^2)$

$\log_2(x-1)\geq\frac{1}{2}\log_2(5-x^2)$

$2\log_2(x-1)\geq\log_2(5-x^2)$

$\log_2(x-1)^2\geq\log_2(5-x^2)$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$(x-1)^2\geq5-x^2$

$2x^2-2x-4\geq0$, $x^2-x-2\geq0$

$(x+1)(x-2)\geq0$

$\therefore x\leq-1$ 또는 $x\geq2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2\leq x<\sqrt{5}$

(3) 진수의 조건에서 $x^2+4x-5>0$, $x+1>0$

(i) $x^2+4x-5>0$에서 $(x+5)(x-1)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>1$

(ii) $x+1>0$에서 $x>-1$

(i), (ii)에서 $x>1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{4}}(x^2+4x-5)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$에서

$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2}(x^2+4x-5)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x-5)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x-5)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)^2$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $x^2+4x-5<(x+1)^2$

$x^2+4x-5<x^2+2x+1$

$2x<6$ $\therefore x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<3$

답 (1) $3<x<7$ (2) $2\leq x<\sqrt{5}$ (3) $1<x<3$

0462 진수의 조건에서 $x+4>0$, $8-x>0$

$\therefore -4<x<8$ …… ㉠

$\log_2(x+4)+\log_2(8-x)>k$에서

$\log_2(x+4)(8-x)>\log_2 2^k$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $(x+4)(8-x)>2^k$

$x^2-4x+2^k-32<0$ …… ㉡

주어진 부등식의 해가 $0<x<4$이고 $0<x<4$가 ㉠에 포함되므로 ㉡의 해가 $0<x<4$이어야 한다.

$x^2-4x+2^k-32<0\iff x(x-4)<0$

$\iff x^2-4x<0$

즉 $2^k-32=0$이므로 $2^k=32=2^5$

$\therefore k=5$

답 ⑤

0463 진수의 조건에서 $\log_2 x>0$, $x>0$

$\log_2 x>0$에서 $\log_2 x>\log_2 1$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $x>1$

$\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_5(\log_2 x)\leq1$에서

$\log_5(\log_2 x)\leq\log_5 5$

이때 밑 5가 $5>1$이므로 $\log_2 x\leq5$

$\log_2 x\leq\log_2 32$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $x\leq32$

그런데 ㉠에서 $x>1$이므로 부등식 $\log_5(\log_2 x)\leq1$의 해는

$1<x\leq32$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=32$이므로

$\alpha\beta=32$

답 32

0464 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-\log_{\frac{1}{3}}x^2\geq0$에서

$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-2\log_{\frac{1}{3}}x\geq0$

이때 $\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $t^2-2t\geq0$

$t(t-2)\geq0$ $\therefore t\leq0$ 또는 $t\geq2$

즉 $\log_{\frac{1}{3}}x\leq0$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x\geq2$

$\log_{\frac{1}{3}}x\leq\log_{\frac{1}{3}}1$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x\geq\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

이때 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x\geq1$ 또는 $x\leq\frac{1}{9}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x\leq\frac{1}{9}$ 또는 $x\geq1$

답 $0<x\leq\frac{1}{9}$ 또는 $x\geq1$

0465 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^6+8<0$에서

$(\log_2 x)^2-6\log_2 x+8<0$ …… 가

이때 $\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-6t+8<0$

$(t-2)(t-4)<0$

$\therefore 2<t<4$

즉 $2<\log_2 x<4$이므로

$\log_2 2^2<\log_2 x<\log_2 2^4$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $4<x<16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4<x<16$

…… ㉯

따라서 $a=4$, $b=16$이므로 $a-b=-12$

…… ㉰

답 -12

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 부등식 정리하기	40 %
㉯	부등식의 해 구하기	50 %
㉰	$a-b$의 값 구하기	10 %

0466 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(2+\log_{\frac{1}{2}} x)\log_2 x>-3$에서

$(2-\log_2 x)\log_2 x>-3$

이때 $\log_2 x=t$로 놓으면 $(2-t)t>-3$

$t^2-2t-3<0$

$(t+1)(t-3)<0$

$\therefore -1<t<3$

즉 $-1<\log_2 x<3$이므로

$\log_2 2^{-1}<\log_2 x<\log_2 2^3$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$\frac{1}{2}<x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}<x<8$

따라서 정수 x의 최댓값은 7이다.

답 ③

0467 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(\log_2 4x)(\log_2 8x)<2$에서

$(2+\log_2 x)(3+\log_2 x)<2$

이때 $\log_2 x=t$로 놓으면

$(2+t)(3+t)<2$, $t^2+5t+4<0$

$(t+1)(t+4)<0$

$\therefore -4<t<-1$

즉 $-4<\log_2 x<-1$이므로

$\log_2 2^{-4}<\log_2 x<\log_2 2^{-1}$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$\frac{1}{16}<x<\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{16}<x<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{16}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}}=8$$

답 ②

0468 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_3 x}<9x$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}<\log_3 9x$

$(\log_3 x)^2<2+\log_3 x$

이때 $\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2<2+t$

$t^2-t-2<0$, $(t+1)(t-2)<0$

$\therefore -1<t<2$

즉 $-1<\log_3 x<2$이므로

$\log_3 3^{-1}<\log_3 x<\log_3 3^2$

이때 밑 3이 $3>1$이므로 $\frac{1}{3}<x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3}<x<9$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, …, 8의 8개이다.

답 ③

0469 (1) 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_2 x}<64x$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}<\log_2 64x$

$(\log_2 x)^2<6+\log_2 x$

이때 $\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2<6+t$

$t^2-t-6<0$, $(t+2)(t-3)<0$

$\therefore -2<t<3$

즉 $-2<\log_2 x<3$이므로

$\log_2 2^{-2}<\log_2 x<\log_2 2^3$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $\frac{1}{4}<x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}<x<8$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log x+3}\geq 10000$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x+3}\geq \log 10000$

$(\log x+3)\log x\geq 4$

$(\log x)^2+3\log x-4\geq 0$

이때 $\log x=t$로 놓으면 $t^2+3t-4\geq 0$

$(t+4)(t-1)\geq 0$

$\therefore t\leq -4$ 또는 $t\geq 1$

즉 $\log x\leq -4$ 또는 $\log x\geq 1$이므로

$\log x\leq \log 10^{-4}$ 또는 $\log x\geq \log 10$

이때 밑이 1보다 크므로

$x\leq 10^{-4}$ 또는 $x\geq 10$

$\therefore x\leq \frac{1}{10000}$ 또는 $x\geq 10$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x\leq \frac{1}{10000}$ 또는 $x\geq 10$

답 (1) $\frac{1}{4}<x<8$ (2) $0<x\leq \frac{1}{10000}$ 또는 $x\geq 10$

0470 (i) $\log_4(x+4)^2 \geq \log_2 3x$의 진수의 조건에서

$(x+4)^2>0$, $3x>0$

$\therefore x>0$ …… ㉠

$\log_4(x+4)^2 \geq \log_2 3x$에서

$\log_{2^2}(x+4)^2 \geq \log_2 3x$

㉠에서 $x+4>0$이므로

$\log_2(x+4) \geq \log_2 3x$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$x+4 \geq 3x$ $\therefore x \leq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x \leq 2$

(ii) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq -1$의 진수의 조건에서 $x+2>0$

$\therefore x>-2$ …… ㉢

$\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq -1$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

이때 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$x+2 \leq 3$ $\therefore x \leq 1$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$-2<x \leq 1$

따라서 (i), (ii)에서 연립부등식의 해는

$0<x \leq 1$

이므로 자연수 x의 값은 1이다.

답 **1**

0471 (i) $2\log(x+3)<\log(5x+15)$의 진수의 조건에서

$x+3>0$, $5x+15>0$

$\therefore x>-3$ …… ㉠

$2\log(x+3)<\log(5x+15)$에서

$\log(x+3)^2<\log(5x+15)$

이때 밑이 1보다 크므로

$(x+3)^2<5x+15$

$x^2+x-6<0$

$(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3<x<2$

(ii) $2^{x+3}>4$에서

$2^{x+3}>2^2$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$x+3>2$ $\therefore x>-1$

따라서 (i), (ii)에서 연립부등식의 해는

$-1<x<2$

답 $-1<x<2$

유형 up

본문 60쪽

0472 $(\log_2 x)^2+8\log_2 x+8\log_2 k>0$ …… ㉠

에서 $\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+8t+8\log_2 k>0$ …… ㉡

모든 양수 x에 대하여 ㉠이 성립할 조건은 모든 실수 t에 대하여 ㉡이 성립할 조건과 같으므로 이차방정식 $t^2+8t+8\log_2 k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-8\log_2 k<0$, $16-8\log_2 k<0$

$\log_2 k>2$, $\log_2 k>\log_2 4$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$k>4$

답 $k>4$

0473 $\log_{\frac{1}{5}} x(\log_5 x+10) \leq 25\log_5 k$ …… ㉠

에서

$-\log_5 x(\log_5 x+10) \leq 25\log_5 k$

$-(\log_5 x)^2-10\log_5 x \leq 25\log_5 k$

$(\log_5 x)^2+10\log_5 x+25\log_5 k \geq 0$

이때 $\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2+10t+25\log_5 k \geq 0$ …… ㉡

모든 양수 x에 대하여 ㉠이 성립할 조건은 모든 실수 t에 대하여 ㉡이 성립할 조건과 같으므로 이차방정식

$t^2+10t+25\log_5 k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=5^2-25\log_5 k \leq 0$

$25-25\log_5 k \leq 0$, $-25\log_5 k \leq -25$

$\log_5 k \geq 1$, $\log_5 k \geq \log_5 5$

이때 밑 5가 $5>1$이므로

$k \geq 5$

답 $k \geq 5$

0474 진수의 조건에서 $a>0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-x\log a+\log a+3=0$이 실근을 갖지 않으므로 판별식을 D라 하면

$D=(-\log a)^2-4(\log a+3)<0$

$(\log a)^2-4\log a-12<0$

이때 $\log a=t$로 놓으면 $t^2-4t-12<0$

$(t+2)(t-6)<0$ $\therefore -2<t<6$

즉 $-2<\log a<6$이므로

$\log 10^{-2}<\log a<\log 10^6$

이때 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{100}<a<10^6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{100}<a<10^6$

답 $\frac{1}{100}<a<10^6$

0475 진수의 조건에서 $a>0$ …… ㉠

$(1-\log_3 a)x^2-2(1-\log_3 a)x+\log_3 a>0$에서

(i) $\log_3 a=1$, 즉 $a=3$일 때 주어진 부등식은 $1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $\log_3 a\neq 1$, 즉 $a\neq 3$일 때

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차방정식 $(1-\log_3 a)x^2-2(1-\log_3 a)x+\log_3 a=0$의 판별식을 D라 할 때, $1-\log_3 a>0$이고 $D<0$이어야 한다.

$1-\log_3 a>0$에서 $\log_3 a<1$, $\log_3 a<\log_3 3$

$\therefore a<3$ …… ㉡

$\frac{D}{4}=(1-\log_3 a)^2-(1-\log_3 a)\log_3 a<0$에서

$\log_3 a=t$로 놓으면

$(1-t)^2-(1-t)t<0$, $2t^2-3t+1<0$

$(2t-1)(t-1)<0$ $\therefore \frac{1}{2}<t<1$

즉 $\frac{1}{2}<\log_3 a<1$이므로

$\log_3 3^{\frac{1}{2}}<\log_3 a<\log_3 3$

이때 밑 3이 $3>1$이므로

$\sqrt{3}<a<3$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $\sqrt{3}<a<3$

(i), (ii)에서 $\sqrt{3}<a\leq 3$ …… ㉣

따라서 ㉠, ㉣의 공통 범위를 구하면 $\sqrt{3}<a\leq 3$이므로 정수 a의 값은 2, 3이고, 이들의 곱은 $2\cdot 3=6$

답 6

0476 A사, B사에서 출시한 자동차의 소음의 세기를 각각 P_A, P_B라 하면

A사에서 출시한 자동차의 소음의 크기가 40 dB이므로

$40=10(\log P_A+12)$

$4=\log P_A+12$ $\therefore \log P_A=-8$ …… ㉠

B사에서 출시한 자동차의 소음의 크기가 60 dB이므로

$60=10(\log P_B+12)$

$6=\log P_B+12$ $\therefore \log P_B=-6$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$\log P_B-\log P_A=2$

$\log \frac{P_B}{P_A}=2$, $\frac{P_B}{P_A}=100$ $\therefore P_B=100P_A$

따라서 B사에서 출시한 자동차의 소음의 세기는 A사에서 출시한 자동차의 소음의 세기의 100배이다.

답 ④

0477 리히터 규모 7인 지진과 리히터 규모 3인 지진에 의하여 발생하는 에너지를 각각 E_7, E_3이라 하면

$\log 10E_7=11.8+1.5\times 7$ …… ㉠

$\log 10E_3=11.8+1.5\times 3$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$\log 10E_7-\log 10E_3=1.5\times 7-1.5\times 3$

$\log \frac{E_7}{E_3}=6$, $\frac{E_7}{E_3}=10^6$ $\therefore E_7=10^6E_3$

따라서 리히터 규모 7인 지진에 의하여 발생하는 에너지는 리히터 규모 3인 지진에 의하여 발생하는 에너지의 10^6배이다.

$\therefore k=6$

답 6

0478 미생물의 개체수가 1시간마다 r배씩 증가한다고 하면 배양을 시작한 지 10시간 후 이 미생물의 개체수가 처음의 $\frac{5}{2}$배가 되었으므로

$r^{10}=\frac{5}{2}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log r^{10}=\log \frac{5}{2}$

$10\log r=\log 5-\log 2$

$\therefore \log r=\frac{\log 5-\log 2}{10}=\frac{1-2\log 2}{10}$ …… ㉠

이 미생물의 개체수가 처음의 3배 이상이 되는 것은 배양을 시작한 지 최소 n시간 후이므로

$r^n\geq 3$

양변에 상용로그를 취하면

$\log r^n\geq \log 3$

$n\log r\geq \log 3$

$\therefore n\geq \frac{\log 3}{\log r}$ ($\because \log r>0$)

$=\frac{10\log 3}{1-2\log 2}=\frac{4.771}{1-0.602}$

$=11.\times\times\times$

따라서 자연수 n의 최솟값은 12이다.

답 12

시험에 꼭 나오는 문제 본문 61~64쪽

0479 $f(x)=\log_{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+1}{x}\right)$이므로

$f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(8)$

$=\log_{\sqrt{3}}\frac{4}{3}+\log_{\sqrt{3}}\frac{5}{4}+\log_{\sqrt{3}}\frac{6}{5}+\cdots+\log_{\sqrt{3}}\frac{9}{8}$

$=\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}\right)$

$=\log_{\sqrt{3}}3=2$

답 2

0480 $(f\circ g)(x)=3x$이므로

$(f\circ g)\left(\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{1}{3}=1$

$\therefore f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right)=1$

이때 함수 $f(x)=\log_2(x+1)-2$에서

$f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\log_2\left\{g\left(\frac{1}{3}\right)+1\right\}-2$

이므로

$\log_2\left\{g\left(\frac{1}{3}\right)+1\right\}-2=1$

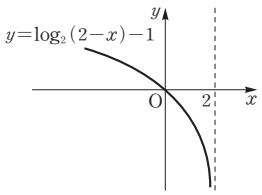
$\log_2\left\{g\left(\frac{1}{3}\right)+1\right\}=3$

즉 $g\left(\frac{1}{3}\right)+1=2^3=8$

$\therefore g\left(\frac{1}{3}\right)=8-1=7$

답 **7**

0481 $y=\log_2(2-x)-1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



② 치역은 실수 전체의 집합이다.

⑤ $y=\log_2(2-x)-1$에서 $y+1=\log_2(2-x)$

즉 $2-x=2^{y+1}$ $\therefore x=2-2^{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$y=2-2^{x+1}$

따라서 옳지 않은 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

0482 함수 $y=\log_5(x-a)+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$이므로 $a=2$

함수 $y=\log_5(x-2)+b$의 그래프가 점 $(7, 0)$을 지나므로

$0=\log_5(7-2)+b$, $1+b=0$

$\therefore b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

답 **1**

0483 $y=\log_3(6x-72)=\log_3 6(x-12)$

$=\log_3\{3\cdot 2(x-12)\}=\log_3 2(x-12)+1$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=\log_3 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 12만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=3$, $m=12$, $n=1$이므로

$a+m+n=16$

답 **16**

0484 ㄱ. 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=3^x$

$y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동 ⇨ $y=3^{x-2}-1$

ㄴ. $y=2\log_9(x-3)$에서

$y=2\log_{3^2}(x-3)$

$\therefore y=\log_3(x-3)$

즉 $y=2\log_9(x-3)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이다.

ㄷ. $y=\frac{3}{3^x}$에서 $y=3^{1-x}$, 즉 $y=3^{-(x-1)}$

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=3^x$

$y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동 ⇨ $y=3^{-x}$

$y=3^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동 ⇨ $y=3^{-(x-1)}$

ㄹ. 함수 $y=\log_9 x^2$의 정의역은 $\{x|x\neq 0$인 모든 실수$\}$이므로 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

따라서 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ②

0485 $A=\frac{1}{2}\log_{0.1}2=\log_{0.1}\sqrt{2}$, $B=\log_{0.1}\sqrt{3}$

$C=\frac{1}{3}\log_{0.1}8=\log_{0.1}\sqrt[3]{8}=\log_{0.1}2$

밑 0.1이 $0<0.1<1$이고 $\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$이므로

$\log_{0.1}2<\log_{0.1}\sqrt{3}<\log_{0.1}\sqrt{2}$

$\therefore C<B<A$

답 ⑤

0486 함수 $y=\log_a x+k$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$와 $y=\log_a x+k$의 그래프의 교점과 같으므로 두 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(2, 2)$이다.

함수 $y=\log_a x+k$의 그래프가 두 점 $(1, 1)$, $(2, 2)$를 지나므로

$1=\log_a 1+k$에서 $k=1$

$2=\log_a 2+1$에서 $1=\log_a 2$

$\therefore a=2$

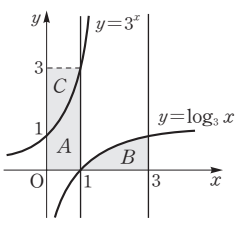
$\therefore a+k=2+1=3$

답 **3**

0487 두 함수 $y=3^x$과 $y=\log_3 x$는 서로 역함수 관계이므로 $B=C$이다.

$\therefore A+B=A+C=1\cdot 3=3$

답 **3**



0488 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=\log_2(x-1)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$는 함수

$y=\log_2(x-1)$의 역함수이다.
점 $P(2, b)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로 점 $(b, 2)$는 곡선 $y=\log_2(x-1)$ 위의 점이다.
즉 $2=\log_2(b-1)$, $b-1=2^2$
$\therefore b=2^2+1=5$
점 $Q(a, 5)$가 곡선 $y=\log_2(x-1)$ 위의 점이므로
$5=\log_2(a-1)$
$a-1=2^5$
$\therefore a=2^5+1=33$
$\therefore a+b=33+5=38$

답 38

0489 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 이 함수는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 이 함수는 $x=8$일 때 최솟값 -2를 가지므로
$\log_{\frac{1}{2}}(8-a)=-2$
즉 $8-a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$ $\therefore a=4$

답 ⑤

0490 진수의 조건에서 $-x^2+4x+5>0$
$x^2-4x-5<0$, $(x+1)(x-5)<0$
$\therefore -1<x<5$
$y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+4x+5)$에서 밑 $\frac{1}{3}$은 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 이 함수는 진수가 최대일 때 y가 최솟값을 갖는다.
이때 진수는 $-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$이므로 $-1<x<5$에서 $x=2$일 때 최대이고 최댓값은 9이다.
따라서 주어진 함수는 $x=2$일 때 최솟값
$\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{3^{-1}}3^2=-2$를 갖는다.
$\therefore a=2$, $b=-2$
$\therefore a+b=2+(-2)=0$

답 0

0491 함수 $g(x)=x^2-8x+80=(x-4)^2+64$의 치역 $\{y|y\geq 64\}$는 함수 $f(x)=\log_2\frac{x}{4}$의 정의역인 양수 전체의 집합에 포함되므로 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 정의된다.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\log_2\frac{g(x)}{4}$$
$$=\log_2\frac{x^2-8x+80}{4}$$
$$=\log_2(x^2-8x+80)-\log_2 4$$
$$=\log_2\{(x-4)^2+64\}-2$$

함수 $(f\circ g)(x)$에서 밑 2는 $2>1$이므로 이 함수는 $x^2-8x+80$이 최소일 때 최솟값을 갖는다.
이때 $x^2-8x+80=(x-4)^2+64$는 $x=4$일 때 최솟값 64를 가지므로 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=4$에서 최솟값 $\log_2 64-2=4$를 갖는다.

답 4

0492 $y=(\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}}x)+2\log_3 x+10$
$=(\log_3 x)(\log_{3^{-1}}x)+2\log_3 x+10$
$=-(\log_3 x)^2+2\log_3 x+10$
이때 $\log_3 x=t$로 놓으면
$y=-t^2+2t+10=-(t-1)^2+11$ …… ㉠
또 $1\leq x\leq 81$에서 $\log_3 1\leq\log_3 x\leq\log_3 81$
$\therefore 0\leq t\leq 4$
따라서 ㉠은 $0\leq t\leq 4$에서
$t=1$일 때 최댓값 $M=11$,
$t=4$일 때 최솟값 $m=-(4-1)^2+11=2$를 갖는다.
$\therefore M+m=11+2=13$

답 13

0493 $\frac{1}{4}<x<25$에서
$1<4x<100$, $1<\frac{25}{x}<100$이므로
$0<\log 4x<2$, $0<\log\frac{25}{x}<2$
즉 $\log 4x$, $\log\frac{25}{x}$가 모두 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\log 4x+\log\frac{25}{x}\geq 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}$
$\log\left(4x\cdot\frac{25}{x}\right)\geq 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}$
$2\geq 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}$
$\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}\leq 1$ $\therefore \log 4x\cdot\log\frac{25}{x}\leq 1$
이때 등호가 성립하는 경우는 $\log 4x=\log\frac{25}{x}$, 즉 $4x=\frac{25}{x}$
$x^2=\frac{25}{4}$ $\therefore x=\frac{5}{2}\left(\because \frac{1}{4}<x<25\right)$
따라서 주어진 함수는 $x=\frac{5}{2}$일 때 최댓값 1을 갖는다.
$\therefore a=\frac{5}{2}$, $b=1$
$\therefore a+b=\frac{7}{2}$

답 ③

0494 밑과 진수의 조건에서
$2x^2+1>0$, $2x^2+1\neq 1$, $7x-2>0$, $7x-2\neq 1$, $2x-1>0$
$\therefore x>\frac{1}{2}$ …… ㉠
$\log_{2x^2+1}(2x-1)=\log_{7x-2}(2x-1)$에서
(i) $2x^2+1=7x-2$일 때,

$2x^2-7x+3=0$, $(2x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 $x=3$

(ii) $2x-1=1$일 때, $x=1$

$x=1$은 ㉠을 만족시키므로 근이다.

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 x의 값의 합은 $1+3=4$

답 4

0495 $x^{\log x^2}=100x^3$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x^2}=\log 100x^3$

$\log x^2\cdot\log x=\log 100+\log x^3$

$2\log x\cdot\log x=2+3\log x$

$2(\log x)^2-3\log x-2=0$

이때 $\log x=t$로 놓으면

$2t^2-3t-2=0$, $(2t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

즉 $\log x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\log x=2$이므로

$x=10^{-\frac{1}{2}}$ 또는 $x=10^2$

따라서 $\alpha=10^{-\frac{1}{2}}$, $\beta=10^2$ 또는 $\alpha=10^2$, $\beta=10^{-\frac{1}{2}}$이므로

$\log\alpha\beta=\log(10^{-\frac{1}{2}}\cdot10^2)=\log 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

답 ④

다른풀이 $2(\log x)^2-3\log x-2=0$ …… ㉠

에서 $\log x=t$로 놓으면 $2t^2-3t-2=0$ …… ㉡

㉠의 두 근이 α, β이면 ㉡의 두 근은 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=\frac{3}{2}$ $\therefore \log\alpha\beta=\frac{3}{2}$

0496 $\log_2(x+y)=2$에서 $x+y=4$

$\log_2 x+\log_2 y=1$에서 $\log_2 xy=1$ $\therefore xy=2$

$\therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=4^2-4\cdot2=8$

답 8

0497 $(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$에서

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$ …… ㉠

이때 $\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-3t+2=0$ …… ㉡

㉠의 두 근이 α, β이므로 ㉡의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=3$, $\log_3\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha\beta=3^3=27$

답 27

0498 $(\log x)\left(\log\frac{x}{27}\right)=1$에서

$\log x(\log x-\log 27)=1$

이때 $\log x=t$로 놓으면 $t(t-\log 27)=1$

$t^2-t\log 27-1=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log\alpha$, $\log\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=\log 27$, $\log\alpha\beta=\log 27$

$\therefore \alpha\beta=27$

답 27

0499 $\log(-x^2+ax-4)\geq\log x+1$에서

$\log(-x^2+ax-4)\geq\log 10x$

이때 밑이 1보다 크므로 $-x^2+ax-4\geq10x$

$x^2+(10-a)x+4\leq0$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}\leq x\leq8$이므로

$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-8)\leq0$, $x^2-\frac{17}{2}x+4\leq0$

이 부등식이 ㉠과 일치해야 하므로

$10-a=-\frac{17}{2}$ $\therefore a=\frac{37}{2}$

답 $\frac{37}{2}$

0500 부등식 $(\log_3 x)^2+a\log_3 x+b\leq0$의 해가

$\frac{1}{9}\leq x\leq27$이고 밑 3이 $3>1$이므로

$\log_3\frac{1}{9}\leq\log_3 x\leq\log_3 27$

즉 $-2\leq\log_3 x\leq3$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $-2\leq t\leq3$

이때 주어진 부등식은 $t^2+at+b\leq0$ …… ㉠

해가 $-2\leq t\leq3$이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$(t+2)(t-3)\leq0$, $t^2-t-6\leq0$

이 부등식이 ㉠과 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

$\therefore ab=6$

답 6

0501 진수의 조건에서 $a>0$ …… ㉠

부등식 $x^2-2(1+\log_2 a)x+1-(\log_2 a)^2>0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2-2(1+\log_2 a)x+1-(\log_2 a)^2=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 한다. 즉

$\frac{D}{4}=(1+\log_2 a)^2-\{1-(\log_2 a)^2\}<0$

$1+2\log_2 a+(\log_2 a)^2-1+(\log_2 a)^2<0$

$2(\log_2 a)^2+2\log_2 a<0$

이때 $\log_2 a=t$로 놓으면 $2t^2+2t<0$

$t(t+1)<0$ $\therefore -1<t<0$

즉 $-1<\log_2 a<0$이므로

$\log_2 2^{-1}<\log_2 a<\log_2 1$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $\frac{1}{2}<a<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{2}<a<1$

답 ②

0502 처음 물에 섞여 있는 중금속의 양을 a라 하고,
여과기를 n번 통과한 후 남아 있는 중금속의 양이 처음 양의 2 % 이하가 된다고 하면

$a\left(1-\frac{20}{100}\right)^n\le\frac{2}{100}a$, $\left(\frac{8}{10}\right)^n\le\frac{2}{100}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log\frac{8}{10}\le\log\frac{2}{100}$

$n(\log 8-\log 10)\le\log 2-\log 100$

$n(1-3\log 2)\ge 2-\log 2$

$\therefore n\ge\frac{2-\log 2}{1-3\log 2}=\frac{2-0.3010}{1-3\times 0.3010}=\frac{1.699}{0.097}=17.\times\times\times$

따라서 자연수 n의 최솟값이 18이므로 여과 장치를 최소한 18번 통과시켜야 한다.

답 ②

0503 $\mathrm{A}(k, \log_3 k)$, $\mathrm{B}(k, \log_{27} k)$이고 …… ㉮

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_3 k-\log_{27} k=2$이므로 …… ㉯

$\log_3 k-\log_{3^3} k=2$

$\log_3 k-\frac{1}{3}\log_3 k=2$, $\frac{2}{3}\log_3 k=2$

$\log_3 k=3$ $\therefore k=27$ …… ㉰

답 **27**

단계	채점요소	배점
㉮	점 A, B의 좌표 구하기	30 %
㉯	$\overline{\mathrm{AB}}$의 식 세우기	40 %
㉰	k의 값 구하기	30 %

0504 $y=2(\log_2 x)^2-\log_{\sqrt{2}} x^3+a$

$=2(\log_2 x)^2-\log_{2^{\frac{1}{2}}} x^3+a$

$=2(\log_2 x)^2-6\log_2 x+a$

이때 $\log_2 x=t$로 놓으면 $y=2t^2-6t+a$ …… ㉮

$y=2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+a$

따라서 $t=\frac{3}{2}$일 때, 최솟값 $-\frac{9}{2}+a$를 갖는다. …… ㉯

$\log_2 x=\frac{3}{2}$에서 $x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$ $\therefore b=2\sqrt{2}$

최솟값이 2이므로

$-\frac{9}{2}+a=2$에서 $a=\frac{13}{2}$ …… ㉰

$\therefore a^2b^2=(ab)^2=\left(\frac{13}{2}\cdot 2\sqrt{2}\right)^2=338$ …… ㉱

답 **338**

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 함수를 $\log_2 x=t$로 치환하여 나타내기	30 %
㉯	함수가 최소일 때의 t의 값과 최솟값 구하기	20 %
㉰	a, b의 값 구하기	40 %
㉱	a^2b^2의 값 구하기	10 %

0505 양수 a가 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}}=-\sqrt{\frac{a}{a-1}}$를 만족시키므로

$a>0$, $a-1<0$ $\therefore 0<a<1$ …… ㉮

부등식 $\log_a x>\log_a 4-\log_a(x-3)$의
진수의 조건에서

$x>0$, $x-3>0$ $\therefore x>3$ …… ㉠

$\log_a x>\log_a 4-\log_a(x-3)$에서

$\log_a x+\log_a(x-3)>\log_a 4$

$\log_a x(x-3)>\log_a 4$

이때 밑 a가 $0<a<1$이므로

$x(x-3)<4$, $x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$ $\therefore -1<x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<4$ …… ㉯

답 $\boldsymbol{3<x<4}$

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값의 범위 구하기	40 %
㉯	a의 값의 범위를 이용하여 부등식 풀기	60 %

0506 (i) $\log_3|x-3|<4$의 진수의 조건에서

$|x-3|>0$ $\therefore x\ne 3$ …… ㉠

$\log_3|x-3|<4$에서

$\log_3|x-3|<\log_3 3^4$

이때 밑 3이 $3>1$이므로 $|x-3|<3^4$

$-81<x-3<81$

$\therefore -78<x<84$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-78<x<3$ 또는 $3<x<84$ …… ㉮

(ii) $\log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3$의 진수의 조건에서

$x>0$, $x-2>0$ $\therefore x>2$ …… ㉢

$\log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3$에서

$\log_2 x(x-2)\geq \log_2 2^3$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $x(x-2)\geq 8$

$x^2-2x-8\geq 0$, $(x+2)(x-4)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $x\geq 4$ …… ㉮

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는 $4\leq x<84$ …… ㉯

따라서 구하는 정수 x는 4, 5, 6, …, 83의 80개이다. …… ㉰

답 80

단계	채점요소	배점
㉮	$\log_3\lvert x-3\rvert<4$의 해 구하기	40%
㉯	$\log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3$의 해 구하기	40%
㉰	연립부등식의 해 구하기	10%
㉱	정수 x의 개수 구하기	10%

0507 곡선 $y=2^{x+1}$이 y축과 만나는 점은 A(0, 2)

곡선 $y=\log_3(x+1)+1$이 y축과 만나는 점은 B(0, 1)

점 C의 y좌표가 2이므로

$2=\log_3(x+1)+1$에서

$1=\log_3(x+1)$, $x+1=3$

$\therefore x=2$

즉 점 C의 x좌표가 2이다. $\therefore$ C(2, 2)

점 D의 y좌표가 1이므로

$1=2^{x+1}$에서

$x+1=0$ $\therefore x=-1$

즉 점 D의 x좌표는 -1이다. $\therefore$ D(−1, 1)

$\therefore \square ADBC=\frac{1}{2}(\overline{DB}+\overline{AC})\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}(1+2)\cdot 1=\frac{3}{2}$

답 ①

0508 진수의 조건에서

$x^2-2x+1=(x-1)^2>0$

$x^2+2x+1=(x+1)^2>0$

$\therefore x\neq -1$, $x\neq 1$ …… ㉠

$\log(x^2-2x+1)+\log(x^2+2x+1)=\log 9$에서

$\log(x-1)^2+\log(x+1)^2=\log 3^2$

$2\log\lvert x-1\rvert+2\log\lvert x+1\rvert=2\log 3$

$\log\lvert(x-1)(x+1)\rvert=\log 3$

즉 $\lvert(x-1)(x+1)\rvert=3$ $\therefore x^2-1=\pm 3$

(i) $x^2-1=3$이면 $x^2=4$

$\therefore x=\pm 2$

이것은 ㉠을 만족시키므로 근이다.

(ii) $x^2-1=-3$이면 $x^2=-2$

따라서 실근은 없다.

(i), (ii)에서 $x=\pm 2$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-2$ 또는 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=2+(-2)=0$

답 0

0509 집합 A의 부등식에서 진수의 조건에 의하여

$x+1>0$ $\therefore x>-1$ …… ㉠

$\lvert\log_4(x+1)-1\rvert<1$에서

$-1<\log_4(x+1)-1<1$

$0<\log_4(x+1)<2$

$\log_4 1<\log_4(x+1)<\log_4 4^2$

이때 밑 4가 $4>1$이므로 $1<x+1<16$

$\therefore 0<x<15$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<15$

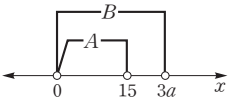
$\therefore A=\{x\mid 0<x<15\}$

집합 B의 부등식 $x(x-3a)<0$에서

(i) $a>0$이면 $0<x<3a$ $\therefore B=\{x\mid 0<x<3a\}$

(ii) $a<0$이면 $3a<x<0$ $\therefore B=\{x\mid 3a<x<0\}$

$A\cap B=A$이려면 $A\subset B$가 성립해야 하므로 $a>0$이어야 하고 오른쪽 그림에서



$3a\geq 15$ $\therefore a\geq 5$

따라서 a의 최솟값은 5이다.

답 5

0510 $A'(a, 0)$ $(a>0)$이라 하면

$\overline{OA'}=a$, $\overline{OB'}=2a$, $\overline{OC'}=3a$

$\therefore$ A$(a, -\log_3 a)$, B$(2a, \log_3 2a)$, C$(3a, \log_3 3a)$

직선 l의 기울기는 $\overline{AB}$의 기울기, $\overline{BC}$의 기울기와 같으므로

$(\overline{AB}\text{의 기울기})=\frac{\log_3 2a-(-\log_3 a)}{2a-a}$

$(\overline{BC}\text{의 기울기})=\frac{\log_3 3a-\log_3 2a}{3a-2a}$에서

$\frac{\log_3 2a+\log_3 a}{a}=\frac{\log_3 3a-\log_3 2a}{a}$

$\log_3 2a^2=\log_3\frac{3}{2}$

$2a^2=\frac{3}{2}$, $a^2=\frac{3}{4}$ $\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because a>0)$

따라서 점 B의 y좌표는

$\log_3\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$

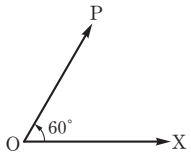
답 $\frac{1}{2}$

05 삼각함수

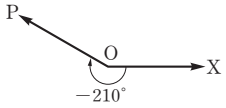
교과서 문제 정복하기

본문 67쪽

0511 답



0512 답



0513 답 $\theta=360^\circ\times n+120^\circ$ (n은 정수)

0514 답 $\theta=360^\circ\times n+230^\circ$ (n은 정수)

0515 $500^\circ=360^\circ\times1+140^\circ$이므로 $360^\circ\times n+140^\circ$

답 $360^\circ\times n+140^\circ$

0516 $-650^\circ=360^\circ\times(-2)+70^\circ$이므로 $360^\circ\times n+70^\circ$

답 $360^\circ\times n+70^\circ$

0517 $550^\circ=360^\circ\times1+190^\circ$이므로 550°는 제3분면의 각이다.

답 제3사분면

0518 $-380^\circ=360^\circ\times(-2)+340^\circ$이므로 -380°는 제4사분면의 각이다.

답 제4사분면

0519 $240^\circ=240\times\frac{\pi}{180}=\frac{4}{3}\pi$

답 $\frac{4}{3}\pi$

0520 $\frac{7}{4}\pi=\frac{7}{4}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=315^\circ$

답 315°

0521 $-300^\circ=(-300)\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{3}\pi$

답 $-\frac{5}{3}\pi$

0522 $-\frac{2}{3}\pi=\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\times\frac{180^\circ}{\pi}=-120^\circ$

답 -120°

0523 $5\pi=2\pi\times2+\pi$이므로 $2n\pi+\pi$

답 $2n\pi+\pi$

0524 $\frac{17}{6}\pi=2\pi\times1+\frac{5}{6}\pi$이므로 $2n\pi+\frac{5}{6}\pi$

답 $2n\pi+\frac{5}{6}\pi$

0525 $-\frac{16}{3}\pi=2\pi\times(-3)+\frac{2}{3}\pi$이므로 $2n\pi+\frac{2}{3}\pi$

답 $2n\pi+\frac{2}{3}\pi$

0526 $-\frac{3}{4}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{5}{4}\pi$이므로 $2n\pi+\frac{5}{4}\pi$

답 $2n\pi+\frac{5}{4}\pi$

0527 $l=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$, $S=\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{4}=2\pi$

답 $l=\pi$, $S=2\pi$

0528 $36^\circ=36\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{5}$이므로

$l=15\cdot\frac{\pi}{5}=3\pi$, $S=\frac{1}{2}\cdot15^2\cdot\frac{\pi}{5}=\frac{45}{2}\pi$

답 $l=3\pi$, $S=\frac{45}{2}\pi$

0529 부채꼴의 호의 길이 $l=4$, 넓이 $S=6$이므로

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $6=\frac{1}{2}\cdot r\cdot4$ $\therefore r=3$

$l=r\theta$에서 $4=3\theta$ $\therefore \theta=\frac{4}{3}$

답 $r=3$, $\theta=\frac{4}{3}$

0530 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$이므로

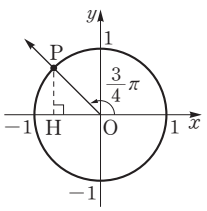
(1) $\sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

(2) $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(3) $\tan\theta=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$

답 (1) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ (2) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (3) $-\frac{1}{3}$

0531 오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원과 $\theta=\frac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 직각삼각형 POH에서 $\overline{OP}=1$,



$\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta=-1$

답 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta=-1$

0532 $\frac{14}{3}\pi=2\pi\cdot2+\frac{2}{3}\pi$이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

$\therefore \sin\theta>0, \cos\theta<0, \tan\theta<0$

답 $\sin\theta>0, \cos\theta<0, \tan\theta<0$

0533 $\sin\theta<0$인 것은 제3사분면과 제4사분면이고, $\cos\theta<0$인 것은 제2사분면과 제3사분면이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

답 제3사분면

0534 $\cos\theta>0$인 것은 제1사분면과 제4사분면이고, $\tan\theta<0$인 것은 제2사분면과 제4사분면이므로 θ는 제4사분면의 각이다.

답 제4사분면

0535 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이고, θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$

답 $\sin\theta=\frac{4}{5}, \tan\theta=-\frac{4}{3}$

0536 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

답 $-\frac{3}{8}$

유형 익히기 본문 68~72쪽

0537 ① $390^\circ=360^\circ\times1+30^\circ$

② $750^\circ=360^\circ\times2+30^\circ$

③ $-330^\circ=360^\circ\times(-1)+30^\circ$

④ $-390^\circ=360^\circ\times(-2)+330^\circ$

⑤ $-690^\circ=360^\circ\times(-2)+30^\circ$

따라서 동경 OP가 나타내는 각이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

0538 ① $-500^\circ=360^\circ\times(-2)+220^\circ$

② $-300^\circ=360^\circ\times(-1)+60^\circ$

③ $-100^\circ=360^\circ\times(-1)+260^\circ$

④ $400^\circ=360^\circ\times1+40^\circ$

⑤ $700^\circ=360^\circ\times1+340^\circ$

따라서 α의 값이 가장 작은 것은 ④이다.

답 ④

0539 ㄱ. $1680^\circ=360^\circ\times4+240^\circ$

ㄴ. $-240^\circ=360^\circ\times(-1)+120^\circ$

ㄷ. $2040^\circ=360^\circ\times5+240^\circ$

ㄹ. $-1920^\circ=360^\circ\times(-6)+240^\circ$

ㅁ. $720^\circ=360^\circ\times2$

따라서 240°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

0540 θ가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$ (n은 정수)

각 변을 2로 나누면

$180^\circ\times n+90^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+135^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$180^\circ\times2k+90^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times2k+135^\circ$

$\therefore 360^\circ\times k+90^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+135^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$180^\circ\times(2k+1)+90^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times(2k+1)+135^\circ$

$360^\circ\times k+270^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ\times k+315^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2, 4사분면이다.

답 제2, 4사분면

0541 ㄱ. $400^\circ=360^\circ\times1+40^\circ$ $\therefore$ 제1사분면

ㄴ. $820^\circ=360^\circ\times2+100^\circ$ $\therefore$ 제2사분면

ㄷ. $-200^\circ=360^\circ\times(-1)+160^\circ$ $\therefore$ 제2사분면

ㄹ. $-1000^\circ=360^\circ\times(-3)+80^\circ$ $\therefore$ 제1사분면

따라서 제2사분면의 각은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0542 θ가 제4사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$ (n은 정수)

$\therefore\ 120^\circ\times n+90^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times n+120^\circ$

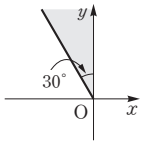
(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$120^\circ\times 3k+90^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times 3k+120^\circ$

$\therefore\ 360^\circ\times k+90^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+120^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림과 같다.

(단, 경계선은 제외한다.)



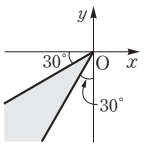
(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$120^\circ\times(3k+1)+90^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times(3k+1)+120^\circ$

$\therefore\ 360^\circ\times k+210^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+240^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림과 같다.

(단, 경계선은 제외한다.)



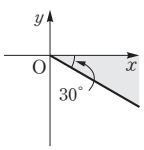
(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$120^\circ\times(3k+2)+90^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times(3k+2)+120^\circ$

$\therefore\ 360^\circ\times k+330^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+360^\circ$

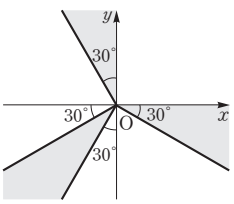
따라서 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림과 같다.

(단, 경계선은 제외한다.)



(i), (ii), (iii)에서 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 속하는 모든 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

(단, 경계선은 제외한다.)



답 ③

0543 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$7\theta-\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$6\theta=360^\circ\times n\qquad\therefore\ \theta=60^\circ\times n$ …… ㉠

$90^\circ<\theta<180^\circ$에서 $90^\circ<60^\circ\times n<180^\circ$이므로

$\frac{3}{2}<n<3$

n은 정수이므로 $n=2$

$n=2$를 ㉠에 대입하면 $\theta=120^\circ$

답 **120°**

0544 $\alpha+\beta=360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)이므로 $\alpha+\beta$의 값이 될 수 있는 것은 ④ 90°이다.

답 ④

0545 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$5\theta=360^\circ\times n\qquad\therefore\ \theta=72^\circ\times n$ …… ㉠

$90^\circ<\theta<180^\circ$에서 $90^\circ<72^\circ\times n<180^\circ$이므로

$\frac{5}{4}<n<\frac{5}{2}$

n은 정수이므로 $n=2$

$n=2$를 ㉠에 대입하면 $\theta=144^\circ$

답 **144°**

0546 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$6\theta-\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$5\theta=360^\circ\times n+180^\circ\qquad\therefore\ \theta=72^\circ\times n+36^\circ$ …… ㉠

$0^\circ<\theta<90^\circ$에서 $0^\circ<72^\circ\times n+36^\circ<90^\circ$이므로

$-\frac{1}{2}<n<\frac{3}{4}$

n은 정수이므로 $n=0$

$n=0$을 ㉠에 대입하면 $\theta=36^\circ$

답 **36°**

0547 ① $45^\circ=45\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$

② $160^\circ=160\times\frac{\pi}{180}=\frac{8}{9}\pi$

③ $-144^\circ=-144\times\frac{\pi}{180}=-\frac{4}{5}\pi$

④ $\frac{5}{12}\pi=\frac{5}{12}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=75^\circ$

⑤ $\frac{9}{5}\pi=\frac{9}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=324^\circ$

답 ⑤

0548 ① $120^\circ=120\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{3}\pi$

② $210^\circ=210\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{6}\pi$

③ $\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=108^\circ$

④ $\frac{11}{6}\pi=\frac{11}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=330^\circ$

⑤ $\frac{7}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=105^\circ$

답 ④

0549 ㄱ. $16^\circ=16\times\frac{\pi}{180}=\frac{4}{45}\pi$

ㄴ. $-\frac{4}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{2}{3}\pi$이므로 $-\frac{4}{3}\pi$는 제 2 사분면의 각이다.

ㄷ. 2라디안$=2\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{360^\circ}{\pi}$

ㄹ. $-\frac{5}{4}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{3}{4}\pi$, $\frac{19}{4}\pi=2\pi\times2+\frac{3}{4}\pi$이므로

$-\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{19}{4}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

0550 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면 호의 길이 $l=6\pi$, 넓이 $S=12\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $\frac{1}{2}\cdot r\cdot6\pi=12\pi$ $\therefore r=4$

따라서 $l=4\theta$에서 $4\theta=6\pi$이므로

$\theta=\frac{3}{2}\pi$

답 ⑤

0551 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면

$\pi\cdot3^2=\frac{1}{2}\cdot6\cdot l$ $\therefore l=3\pi$

답 3π

0552 반지름의 길이가 a, 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$인 부채꼴의 호의 길이가 10π이므로

$a\cdot\frac{5}{6}\pi=10\pi$ $\therefore a=12$

따라서 구하는 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot12\cdot10\pi=60\pi$ $\therefore b=60$

$\therefore b-a=48$

답 ④

0553 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 24이므로 호의 길이는 $24-2r$이다.

$\therefore$ (부채꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}r(24-2r)$

$=-r^2+12r$

$=-(r-6)^2+36$ $(0<r<12)$

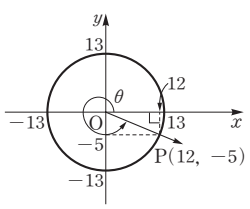
따라서 $r=6$일 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값 S는 36이다.

답 $S=36$, $r=6$

0554 오른쪽 그림에서 원점 O와 점 P(12, −5)를 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때,

$\overline{OP}=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$

이므로



$\sin\theta=-\frac{5}{13}$, $\cos\theta=\frac{12}{13}$, $\tan\theta=-\frac{5}{12}$

$\therefore 13\sin\theta-13\cos\theta+12\tan\theta$

$=-5-12-5=-22$

답 ①

0555 점 $P\left(a, \frac{3}{2}\right)$에 대하여 $\tan\theta=\frac{\frac{3}{2}}{a}=\frac{3}{2a}$이므로

$\frac{3}{2a}=-\frac{3}{4}$ $\therefore a=-2$

또한 $r=\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$이므로

$a+r=-2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0556 A(−3, 1), D(3, 1)이고 $\overline{OA}=\overline{OD}=\sqrt{10}$이므로

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$이므로

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{3}{10}$

답 $\frac{3}{10}$

0557 제4사분면의 점 $P(a, b)$가 직선 $y=-\sqrt{3}x$ 위의 점이므로 $b=-\sqrt{3}a$에서

$P(a, -\sqrt{3}a)$ (단, $a>0$) ····· ㉮

$\therefore \overline{OP}=\sqrt{a^2+(-\sqrt{3}a)^2}=2|a|=2a$ $(\because a>0)$ ····· ㉯

따라서 $\sin\theta=\frac{-\sqrt{3}a}{2a}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$,

$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}a}{a}=-\sqrt{3}$이므로 ····· ㉰

$\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta=\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$ ····· ㉱

답 $\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	점 P의 좌표를 a를 사용하여 나타내기	20 %
㉯	$\overline{OP}$의 길이 구하기	30 %
㉰	$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값 구하기	40 %
㉱	$\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta$의 값 구하기	10 %

0558 (i) $\sin\theta\cos\theta>0$에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$에서 $\cos\theta$와 $\tan\theta$의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제 1 사분면의 각이다.

답 ①

0559 $\tan\theta<0$에서 θ는 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이고 $\cos\theta>0$에서 θ는 제 1 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.
따라서 주어진 조건을 동시에 만족시키는 θ는 제 4 사분면의 각이므로 θ의 크기가 될 수 있는 것은 ⑤ $\frac{5}{3}\pi$이다.

답 ⑤

0560 θ가 제 3 사분면의 각이므로
$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$
① $\sin\theta\tan\theta<0$
② $\sin\theta\cos\theta>0$
③ $\cos\theta\tan\theta<0$
④ $\sin\theta\cos\theta\tan\theta>0$
⑤ $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}<0$
따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

0561 $\sin\theta\cos\theta<0$에서
$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$
이므로 θ는 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.
따라서 항상 옳은 것은 ② $\tan\theta<0$이다.

답 ②

0562 $\sin\theta\cos\theta\neq0$이고 $\frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}=-\sqrt{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$이므로
$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$
즉 θ는 제 4 사분면의 각이므로
$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$
따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=2$이므로 $a+b=\frac{7}{2}$

답 ⑤

0563 (1) θ가 제 3 사분면의 각이므로
$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$
$\therefore \sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt{\cos^2\theta}+\cos\theta-\tan\theta+|\tan\theta|$
$=|\sin\theta|+|\cos\theta|+\cos\theta-\tan\theta+|\tan\theta|$
$=-\sin\theta-\cos\theta+\cos\theta-\tan\theta+\tan\theta$
$=-\sin\theta$
(2) θ가 제 4 사분면의 각이므로
$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$
$\therefore \cos\theta-\tan\theta>0$, $\sin\theta+\tan\theta<0$
$\therefore \sqrt{(\cos\theta-\tan\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta+\tan\theta)^2}$
$=|\cos\theta-\tan\theta|-|\sin\theta+\tan\theta|$
$=(\cos\theta-\tan\theta)+(\sin\theta+\tan\theta)$
$=\sin\theta+\cos\theta$

답 (1) $-\sin\theta$ (2) $\sin\theta+\cos\theta$

0564 $\sin\theta\tan\theta>0$에서
$\sin\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$
이므로 θ는 제 1 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.
또 $\cos\theta\tan\theta<0$에서
$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$
이므로 θ는 제 3 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.
즉 θ는 제 4 사분면의 각이므로
$2n\pi+\frac{3}{2}\pi<\theta<2n\pi+2\pi$ (n은 정수)
$\therefore n\pi+\frac{3}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<n\pi+\pi$
(i) $n=2k$(k는 정수)일 때,
$2k\pi+\frac{3}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\pi$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제 2 사분면의 각이다.
(ii) $n=2k+1$(k는 정수)일 때,
$2k\pi+\frac{7}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+2\pi$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제 4 사분면의 각이다.
(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제 2, 4 사분면이다.

답 **제 2, 4 사분면**

0565 (주어진 식)
$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}$
$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=0$

답 ①

0566 (1) (주어진 식)$=\frac{\sin^2\theta}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}+\sin^2\theta$
$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$
(2) (주어진 식)
$=\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\cos\theta}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$
$=\frac{\sin^2\theta-1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}$
$=\frac{-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$
$=1$

(3) (주어진 식)

$=\left(\sin^2\theta+2+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)+\left(\cos^2\theta+2+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$

$-\left(\tan^2\theta+2+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}+2$

$=1+\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+2$

$=1+\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+2$

$=1+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+2$

$=1+1+1+2=5$

답 (1) **1** (2) **1** (3) **5**

0567 $\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$-\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$

$=|\sin\theta-\cos\theta|-|\sin\theta+\cos\theta|$

$=(\sin\theta-\cos\theta)-(\sin\theta+\cos\theta)$

$=-2\cos\theta$

답 ②

0568 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

$\therefore 5\sin\theta+8\tan\theta=5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+8\cdot\frac{3}{4}$

$=3$

답 ④

0569 (1) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sqrt{2}}{4}+2\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

(2) $\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}$

즉 $\frac{2}{\sin^2\theta}=\frac{8}{3}$이므로 $\sin^2\theta=\frac{3}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$

$\therefore \tan^2\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}=(-\sqrt{3})^2+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$

답 (1) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{13}{3}$

0570 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$이므로

$\frac{1}{\cos^2\theta}=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{13}{9}$ $\therefore \cos^2\theta=\frac{9}{13}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{13}=\frac{4}{13}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\therefore \frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}=\frac{\frac{4}{13}-\frac{9}{13}}{1+\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}}$

$=\frac{-\frac{5}{13}}{1-\frac{6}{13}}=-\frac{5}{7}$

답 $-\frac{5}{7}$

0571 $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=2-\sqrt{3}$에서

$1+\tan\theta=(2-\sqrt{3})(1-\tan\theta)$

$(3-\sqrt{3})\tan\theta=1-\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=\frac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$이므로

$\frac{1}{\cos^2\theta}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1=\frac{4}{3}$ $\therefore \cos^2\theta=\frac{3}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

즉 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

유형 up

본문 73쪽

0572 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

이때

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

한편, θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, 즉 $\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

답 ②

0573 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{4}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

즉 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)$

$=\frac{7\sqrt{5}}{16}$

답 $\frac{7\sqrt{5}}{16}$

0574 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=3$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$

즉 $\sin\theta+\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{15}}{3}$

0575 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$

$=\frac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^2}-2$

$=\frac{1}{\left(-\frac{3}{8}\right)^2}-2$

$=\frac{64}{9}-2=\frac{46}{9}$

답 $\frac{46}{9}$

0576 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{5}$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{5}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{25}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $\frac{k}{5}=-\frac{8}{25}$ $\therefore k=-\frac{8}{5}$

답 $-\frac{8}{5}$

0577 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=1$ …… ㉠

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=a$ …… ㉡

㉠에서 $2\sin\theta=1$ $\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$

㉡에서 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned}(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)&=\sin^2\theta-\cos^2\theta\\&=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)\\&=2\sin^2\theta-1\\&=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

답 ①

0578 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{a}{12}$ …… ㉡

$\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}=\frac{b}{12}$ …… ㉢

㉡에서 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned}\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{12}=-\frac{a}{12}$이므로 $a=25$

㉢에서 $1=\frac{b}{12}$ $\therefore b=12$

$\therefore a+b=25+12=37$

답 37

0579 이차방정식 $2x^2-1=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=0$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$ …… ㉮

이때 $\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}=1$이고

$$\begin{aligned}\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-2\end{aligned}$$

…… ㉯

따라서 $\tan\theta$, $\frac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+2x+1=0$ …… ㉰

답 $x^2+2x+1=0$

단계	채점요소	배점
㉮	$\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$의 값 구하기	30 %
㉯	$\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}$, $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$의 값 구하기	50 %
㉰	조건을 만족하는 이차방정식 구하기	20 %

시험에 꼭 나오는 문제 본문 74~77쪽

0580 ① $-300^\circ=360^\circ\times(-1)+60^\circ$

② 60°

③ 120°

④ $420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$

⑤ $780^\circ=360^\circ\times2+60^\circ$

따라서 같은 위치의 동경을 나타내는 것이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0581 ① $950^\circ=360^\circ\times2+230^\circ$ $\therefore$ 제 3 사분면

② $-500^\circ=360^\circ\times(-2)+220^\circ$ $\therefore$ 제 3 사분면

③ $-\frac{5}{6}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{7}{6}\pi$ $\therefore$ 제 3 사분면

④ $\frac{4}{3}\pi$는 제 3 사분면

⑤ $\frac{11}{4}\pi=2\pi+\frac{3}{4}\pi$ $\therefore$ 제 2 사분면

답 ⑤

0582 3θ가 제 2 사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+90^\circ<3\theta<360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$120^\circ\times n+30^\circ<\theta<120^\circ\times n+60^\circ$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+30^\circ<\theta<360^\circ\times k+60^\circ$

따라서 θ는 제 1 사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+150^\circ<\theta<360^\circ\times k+180^\circ$

따라서 θ는 제 2 사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+270^\circ<\theta<360^\circ\times k+300^\circ$

따라서 θ는 제 4 사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 θ를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제 3 사분면이다.

답 **제 3 사분면**

0583 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$\therefore \theta=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$

이때 $0<\theta<\pi$이므로

$\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$ ..... ㉠

또 각 θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$\therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$

이때 $0<\theta<\pi$이므로

$\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ ..... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 θ의 값은

$\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$

답 π

0584 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면

호의 길이가 $\frac{2}{3}r$이고 둘레의 길이가 24이므로

$r+r+\frac{2}{3}r=24$, $\frac{8}{3}r=24$ $\therefore r=9$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 9^2\times\frac{2}{3}=27$

답 ④

0585 둘레의 길이가 12 cm인 부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 호의 길이를 l cm라 하면

$2r+l=12$, 즉 $l=12-2r$ ..... ㉠

또한 부채꼴의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\frac{1}{2}rl$ ..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$S=\frac{1}{2}r(12-2r)=-r^2+6r=-(r-3)^2+9$

따라서 $r=3$일 때, 부채꼴의 넓이는 최대이다.

이때 부채꼴의 호의 길이는

$12-2\cdot 3=6$(cm)

답 **6 cm**

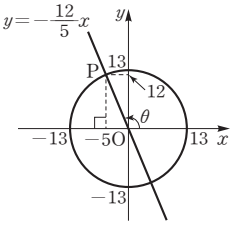
0586 $\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

$\therefore \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\tan\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-3}{6}$

답 $\frac{\sqrt{3}-3}{6}$

0587 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 13인 원이 직선 $12x+5y=0$, 즉 $y=-\frac{12}{5}x$와 만나는 점 중 제 2 사분면 위의 점을 P라 하면



P$(-5, 12)$

$\overline{OP}=13$이므로

$\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13}$

답 $\frac{7}{13}$

0588 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

즉 $\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore \sqrt{\sin^2\theta}-\sqrt{\cos^2\theta}+|\sin\theta-\cos\theta|$

$=|\sin\theta|-|\cos\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|$

$=\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta$

$=2\sin\theta$

답 ⑤

0589 $\frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 θ는 제 3 사분면의 각이다.

$\therefore \sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\sin\theta+\cos\theta<0$

즉 $\sin\theta-\frac{1}{2}<0$, $\cos\theta-\frac{1}{2}<0$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\left|\sin\theta-\frac{1}{2}\right|+\left|\cos\theta-\frac{1}{2}\right|-|\sin\theta+\cos\theta|$

$=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)-\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)+(\sin\theta+\cos\theta)$

$=-\sin\theta+\frac{1}{2}-\cos\theta+\frac{1}{2}+\sin\theta+\cos\theta$

$=1$

답 **1**

0590 $\cos\theta\tan\theta\neq 0$이고 $\frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{\tan\theta}}=-\sqrt{\frac{\cos\theta}{\tan\theta}}$이므로

$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

즉 θ는 제 4 사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore$ (주어진 식)
$=|\sin\theta-\cos\theta|-|\sin\theta|+|\cos\theta|+\cos\theta$
$=-(\sin\theta-\cos\theta)+\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta$
$=-\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta$
$=3\cos\theta$

답 $3\cos\theta$

0591 $\sqrt{\cos\theta}\sqrt{\tan\theta}=-\sqrt{\cos\theta\tan\theta}$이고 $\cos\theta\tan\theta\neq0$이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$
즉 θ는 제2사분면의 각이므로
$\sin\theta>0$, $\cos\theta+\tan\theta<0$, $\sin\theta-\tan\theta>0$
$\therefore$ (주어진 식)
$=|\tan\theta|\cos\theta+|\cos\theta|-|\cos\theta+\tan\theta|$
$\quad-|\sin\theta-\tan\theta|$
$=-\tan\theta\cos\theta-\cos\theta+(\cos\theta+\tan\theta)-(\sin\theta-\tan\theta)$
$=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta-\cos\theta+\cos\theta+\tan\theta-\sin\theta+\tan\theta$
$=-2\sin\theta+2\tan\theta$

답 $-2\sin\theta+2\tan\theta$

0592 ① $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta$
$=\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$
$=\tan^2\theta\sin^2\theta$

② $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}$

③ $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\cos^2\theta}$
$=\frac{\sin\theta+1}{1-\sin^2\theta}=\frac{1+\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$
$=\frac{1}{1-\sin\theta}$

④ $\frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}\cdot\tan^2\theta=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1$

⑤ $\frac{\tan^2\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\tan^2\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\tan^2\theta(1+\cos\theta+1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$
$=\frac{2\tan^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$
$=\frac{2}{\cos^2\theta}$

답 ⑤

0593 $\sqrt{2}\sin\theta-\cos\theta=0$에서
$\cos\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ …… ㉠
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 ㉠을 대입하면
$\sin^2\theta+2\sin^2\theta=1$ $\therefore\sin^2\theta=\frac{1}{3}$
이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta<0$
$\therefore\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ($\because$ ㉠)
$\therefore\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

답 $-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

0594 $\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$
$=\frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}$
즉 $\frac{2}{\sin^2\theta}=5$이므로 $\sin^2\theta=\frac{2}{5}$
$\therefore\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$
이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$
따라서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{5}$이고
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$
$\therefore\sqrt{15}\cos\theta+3\tan^2\theta=-3+2=-1$

답 -1

0595 (가) $(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta$
$=\left(1-\frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}\right)\cos^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$
$=\cos^2\theta-\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$
$=\frac{\cos^4\theta-\sin^4\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$
$=\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$
$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1$
$\therefore\alpha=1$

(나) $\frac{1}{\sin^2\theta}(1-\sin^2\theta)(1-\cos^2\theta)(1+\tan^2\theta)$
$=\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}=1$
$\therefore\beta=1$
$\therefore\alpha+\beta=2$

답 2

0596 $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$이므로
(주어진 식)
$=\{(1+\tan^2 1^\circ)+(1+\tan^2 2^\circ)+\cdots+(1+\tan^2 55^\circ)\}$
$\quad-(\tan^2 1^\circ+\tan^2 2^\circ+\cdots+\tan^2 55^\circ)$
$=(1+\tan^2 1^\circ-\tan^2 1^\circ)+(1+\tan^2 2^\circ-\tan^2 2^\circ)$
$\quad+\cdots+(1+\tan^2 55^\circ-\tan^2 55^\circ)$
$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{55개}=55$

답 55

0597 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=2 \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$

답 ②

0598 $\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

이므로

$\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{2}(\sin\theta-\cos\theta) \quad \therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{4} \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{16}$

답 ②

0599 조건 ㈎에서

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$ ····· ㉠

조건 ㈏에서 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{3}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3} \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$

이때

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

㉠에서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^3+3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{9}$

답 $\frac{2\sqrt{15}}{9}$

0600 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2+2\cos\theta,\ \alpha\beta=-\sin^2\theta$

이때 $|\alpha-\beta|=2$이므로

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-2+2\cos\theta)^2-4(-\sin^2\theta)$

$=4-8\cos\theta+4\cos^2\theta+4\sin^2\theta$

$=8-8\cos\theta$

$=4$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$

이때 $0\le\theta\le\pi$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

답 ③

0601 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

따라서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=4$

이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

0602 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$5\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$4\theta=2n\pi$

$\therefore \theta=\frac{n}{2}\pi$ ····· ㉠

····· ㉮

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{n}{2}\pi<2\pi$이므로

$2<n<4$

이때 n은 정수이므로 $n=3$

····· ㉯

$n=3$을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{3}{2}\pi$

····· ㉰

$\therefore \cos(\theta-\pi)=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\pi\right)$

$=\cos\frac{\pi}{2}=0$ ……… ㉣

답 0

단계	채점요소	배점
㉮	동경이 일치할 조건 알기	30 %
㉯	n의 값 구하기	30 %
㉰	θ의 값 구하기	20 %
㉱	$\cos(\theta-\pi)$의 값 구하기	20 %

0603 부채꼴의 중심각의 크기를 θ, 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$2r+l=16$이므로

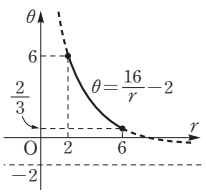
$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(16-2r)=-r^2+8r$ ……… ㉮

$S\geq 12$이므로 $-r^2+8r\geq 12$

$r^2-8r+12\leq 0$, $(r-2)(r-6)\leq 0$

$\therefore 2\leq r\leq 6$ ……… ㉯

그런데 $\theta=\frac{l}{r}=\frac{16-2r}{r}=\frac{16}{r}-2$이므로 $2\leq r\leq 6$에서 $r=2$일 때, θ의 최댓값은 6이다. ……… ㉰



답 6

단계	채점요소	배점
㉮	넓이를 반지름의 길이에 대한 식으로 나타내기	30 %
㉯	반지름의 길이의 범위 구하기	30 %
㉰	중심각의 크기의 최댓값 구하기	40 %

0604 직선 $x-3y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+1$의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 $\tan\theta=\frac{1}{3}$ ……… ㉮

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$이므로

$1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$, $\cos^2\theta=\frac{9}{10}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta>0$, $\sin\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ……… ㉯

$\therefore \sin\theta+\cos\theta+\tan\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{1}{3}$

$=\frac{2\sqrt{10}}{5}+\frac{1}{3}$ ……… ㉰

답 $\frac{2\sqrt{10}}{5}+\frac{1}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	직선의 기울기를 이용하여 $\tan\theta$의 값 구하기	40 %
㉯	$\sin\theta$, $\cos\theta$의 값 구하기	40 %
㉰	주어진 식의 값 구하기	20 %

0605 $2x^2+ax+1=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{a}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{a}{2}$의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{a^2}{4}$

$1+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}$, $a^2=8$

이때 $a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}$ ……… ㉮

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{2}$

또한 $2x^2+bx+c=0$의 두 근이 $\frac{1}{\sin\theta}$, $\frac{1}{\cos\theta}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}=-\frac{b}{2}$

$\therefore b=4\sqrt{2}$ ……… ㉯

$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2=\frac{c}{2}$

$\therefore c=4$ ……… ㉰

$\therefore abc=2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4=64$ ……… ㉱

답 64

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	30 %
㉯	b의 값 구하기	30 %
㉰	c의 값 구하기	30 %
㉱	abc의 값 구하기	10 %

0606 $360^\circ\times n+(-1)^n\times 90^\circ\times n$에서

동경 OP_1이 나타내는 각은 $360^\circ-90^\circ$,

동경 OP_2가 나타내는 각은 $360^\circ\cdot 2+180^\circ$,

동경 OP_3이 나타내는 각은 $360^\circ\cdot 3-270^\circ$,

동경 OP_4가 나타내는 각은 $360^\circ\cdot 4+360^\circ$,

동경 OP_5가 나타내는 각은 $360^\circ\cdot 5-450^\circ=360^\circ\cdot 4-90^\circ$,

$\vdots$

즉 동경 OP_1과 OP_5의 위치가 같으므로 동경 OP_n과 동경 OP_{n+4}의 위치가 같다.

따라서 동경 OP_2, OP_3, $\cdots$, OP_{100} 중에서 동경 OP_1과 같은 위치에 있는 동경은

OP_5, OP_9, OP_{13}, $\cdots$, OP_{97}의 24개

답 **24**

0607 $f(n)=\sin^n\theta+\cos^n\theta$에서

$f(4)=\sin^4\theta+\cos^4\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$\therefore \sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{2}\{1-f(4)\}$

$f(6)=\sin^6\theta+\cos^6\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(1-3\sin^2\theta\cos^2\theta)$

$=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-\frac{3}{2}\{1-f(4)\}$

$=\frac{3}{2}f(4)-\frac{1}{2}$

$\therefore 4f(6)+2=4\left\{\frac{3}{2}f(4)-\frac{1}{2}\right\}+2=6f(4)$

답 ③

0608 이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 두 실근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=a$, $\sin\theta\cos\theta=a$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta$

$=a^2-2a=1$

$a^2-2a-1=0$에서 $a=1-\sqrt{2}$ $(\because |a|\le\sqrt{2})$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=a(1-a)=(1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}-2$

$\therefore \frac{1}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}-2}=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$

답 ⑤

0609 $\overline{OP}=x$라 하면 $120^\circ=\frac{2}{3}\pi$이므로 와이퍼의 블레이드로 닦은 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 70^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi(4900-x^2)$

이때 와이퍼의 블레이드로 닦은 부분의 넓이가 1500π이므로

$\frac{1}{3}\pi(4900-x^2)=1500\pi$, $4900-x^2=4500$

$x^2=400$ $\therefore x=20$ $(\because x>0)$

즉 $\overline{PQ}=70-20=50$

또 $\overline{PC}:\overline{QC}=3:2$이므로 $\overline{PC}=50\cdot\frac{3}{5}=30$

따라서 와이퍼의 암 OC의 길이는

$\overline{OC}=\overline{OP}+\overline{PC}=20+30=50$

답 **50**

06 삼각함수의 그래프

교과서 문제 정복하기

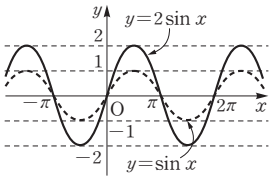
본문 79쪽

0610 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로 $f(x+2)=f(x)$

$\therefore f(9)=f(7)=f(5)=f(3)=f(1)=1$

답 1

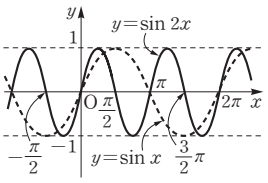
0611 $y=2\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$, 주기는 2π이다.

답 풀이 참조

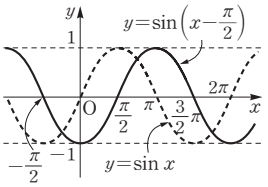
0612 $y=\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$, 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

답 풀이 참조

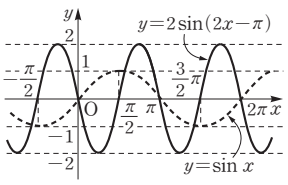
0613 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$, 주기는 2π이다.

답 풀이 참조

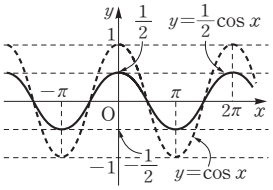
0614 $y=2\sin(2x-\pi)=2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 2배 한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$, 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

답 풀이 참조

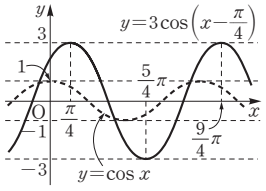
0615 $y=\frac{1}{2}\cos x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$, 주기는 2π이다.

답 풀이 참조

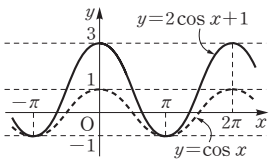
0616 $y=3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$, 주기는 2π이다.

답 풀이 참조

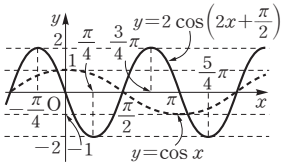
0617 $y=2\cos x+1$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 3\}$, 주기는 2π이다.

답 풀이 참조

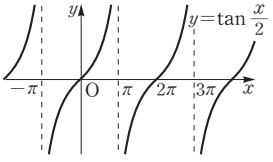
0618 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 2배 한 후, x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$, 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

답 풀이 참조

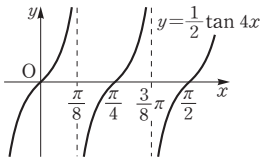
0619 $y=\tan\frac{x}{2}$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$, 점근선의 방정식은 $x=2n\pi+\pi$ (n은 정수)이다.

답 풀이 참조

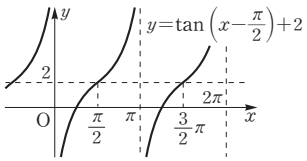
0620 $y=\frac{1}{2}\tan 4x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$배 한 후 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 $\frac{\pi}{4}$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{4}\pi+\frac{\pi}{8}$ (n은 정수)이다.

답 풀이 참조

0621 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.



따라서 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 π, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\pi$ (n은 정수)이다.

답 풀이 참조

0622 $y=\frac{1}{4}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$에서

최댓값은 $\frac{1}{4}$, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$, 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

답 최댓값 : $\frac{1}{4}$, 최솟값 : $-\frac{1}{4}$, 주기 : π

0623 $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$에서

최댓값은 $2+1=3$, 최솟값은 $-2+1=-1$, 주기는 2π

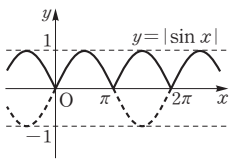
답 최댓값 : 3, 최솟값 : -1, 주기 : 2π

0624 $y=2\tan\frac{\pi}{2}x$에서 최댓값, 최솟값은 없고,

주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

답 최댓값, 최솟값 : 없다., 주기 : 2

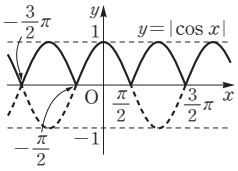
0625 $y=|\sin x|$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=|\sin x|$의 주기는 π이다.

답 π

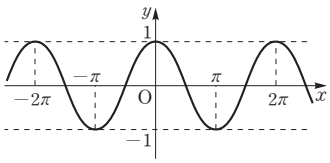
0626 $y=|\cos x|$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=|\cos x|$의 주기는 π이다.

답 π

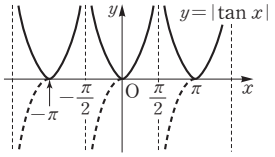
0627 $y=\cos|x|$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 위의 그림과 같다.



따라서 $y=\cos|x|$의 주기는 2π이다.

답 2π

0628 $y=|\tan x|$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=|\tan x|$의 주기는 π이다.

답 π

참고 $y=|a\sin bx|$의 주기 ⇨ $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{|b|}$

$y=|a\cos bx|$의 주기 ⇨ $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{|b|}$

$y=|a\tan bx|$의 주기 ⇨ $\frac{\pi}{|b|}$

0629 $\sin 780^\circ=\sin(360^\circ\times 2+60^\circ)$
$=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0630 $\cos\frac{25}{6}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0631 $\tan\frac{7}{3}\pi=\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

0632 $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0633 $\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0634 $\tan\frac{11}{6}\pi=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
$=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

0635 $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0636 $\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

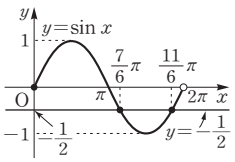
답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0637 $\tan 210^\circ=\tan(180^\circ+30^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0638 오른쪽 그림에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

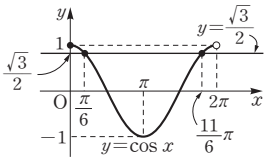


답 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

0639 $2\cos x-\sqrt{3}=0$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$이므로

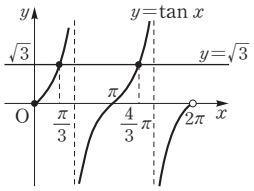
$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$



답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

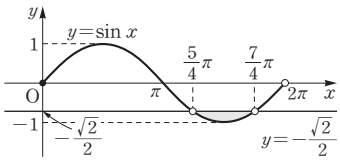
0640 오른쪽 그림에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$



답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

0641 $\sqrt{2}\sin x+1<0$에서 $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$

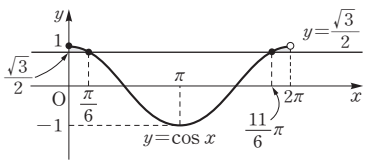


따라서 주어진 부등식의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

답 $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

0642 $2\cos x\geq\sqrt{3}$에서 $\cos x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$

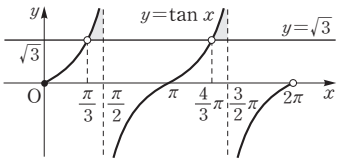


따라서 주어진 부등식의 해는 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$0\leq x\leq\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi\leq x<2\pi$

답 $0\leq x\leq\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi\leq x<2\pi$

0643



주어진 부등식의 해는 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\sqrt{3}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

유형 익히기 본문 80~90쪽

0644 함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여
$f(x+p)=f(x)$
$\therefore f(p)=f(0)=\sin 0+\cos 0+\tan^2 0=1$

답 1

0645 조건 (가)에 의하여
$f\left(\frac{91}{3}\right)=f\left(30+\frac{1}{3}\right)=f\left(3\cdot 10+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$
조건 (나)에 의하여 $0\le x<3$일 때, $f(x)=\cos \pi x$이므로
$f\left(\frac{1}{3}\right)=\cos \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$
$\therefore f\left(\frac{91}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0646 함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(x+np)$ (n은 정수)
$\therefore f(0)=f(2p)=f(4p)=\cdots=f(20p)$
따라서 주어진 식의 값은
$f(2p)+f(4p)+f(6p)+\cdots+f(20p)$
$=10f(0)$
$=10\cdot\frac{\sin 0+\cos 0+1}{3\sin 0+4}$
$=10\cdot\frac{2}{4}=5$

답 5

0647 모든 실수 x에 대하여 $f(x-2)=f(x+1)$이 성립하므로 양변에 x 대신 $x+2$를 대입하면
$f(x)=f(x+3)$
따라서 함수 $f(x)$는 주기가 3인 주기함수이므로
$f(2018)=f(3\cdot 673-1)=f(-1)=2$
$f(2020)=f(3\cdot 673+1)=f(1)=1$
$f(2022)=f(3\cdot 674+0)=f(0)=-1$
$\therefore f(2018)+f(2020)+f(2022)=2+1+(-1)=2$

답 2

0648 ① 최댓값은 $2-1=1$
② 최솟값은 $-2-1=-3$
③ 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$
④ $f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=2\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{6}\right)-1=2\sin \pi-1$
$=2\cdot 0-1=-1$
⑤ $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1$
이므로 $y=2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{12}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

답 ⑤

0649 $y=\sin 3x+1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\sin 3x+1$ $\therefore y=-\sin 3x-1$ ····· (가)

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\sin 3x-1-\frac{3}{2}$ $\therefore y=-\sin 3x-\frac{5}{2}$ ····· (나)

따라서 $a=-1$, $b=-\frac{5}{2}$이므로 $ab=\frac{5}{2}$ ····· (다)

답 $\frac{5}{2}$

단계	채점요소	배점
(가)	x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 구하기	40 %
(나)	y축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식 구하기	40 %
(다)	ab의 값 구하기	20 %

0650 $y=-\frac{1}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+1$에서
$p=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, $M=\left|-\frac{1}{2}\right|+1=\frac{3}{2}$,
$m=-\left|-\frac{1}{2}\right|+1=\frac{1}{2}$
$\therefore pMm=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\pi$

답 $\frac{3}{8}\pi$

0651 ① 최댓값은 $2-1=1$
② 최솟값은 $-2-1=-3$
③ 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$
④ $f(\pi)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-1=\sqrt{3}-1$
즉 그래프가 점 $(\pi, \sqrt{3}-1)$을 지난다.
⑤ $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-1=2\cos\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)-1$
이므로 $y=2\cos\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}\pi$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

답 ④

0652 ㄱ. $y=\cos(2x-5\pi)=\cos 2\left(x-\frac{5}{2}\pi\right)$의 그래프는

$y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}\pi$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=\cos 4x+2$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y=2\cos 2x-3$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y=-\cos 2x-1$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 $y=\cos 2x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0653 $y=-2\cos\left(-3\pi x+\frac{1}{6}\right)+3$에서

$p=\frac{2\pi}{|-3\pi|}=\frac{2}{3}$, $M=|-2|+3=5$

$m=-|-2|+3=-2+3=1$

$\therefore p+M+m=\frac{2}{3}+5+1=\frac{20}{3}$

답 $\frac{20}{3}$

0654 $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+1=3\tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$

- 주기는 $\boxed{\frac{\pi}{2}}$이다.
- $y=3\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{-\frac{\pi}{4}}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{1}$만큼 평행이동한 것이다.
- 점근선의 방정식은 $2x+\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore \boxed{x=\frac{n}{2}\pi\ (n\text{은 정수})}$

답 (가) $\frac{\pi}{2}$ (나) $-\frac{\pi}{4}$ (다) 1 (라) $x=\frac{n}{2}\pi$ (n은 정수)

0655 $y=-2\tan\left(\frac{x}{3}+\pi\right)+3$에서 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$

주어진 함수의 주기를 각각 구해 보면 다음과 같다.

① $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$ ② $\frac{2\pi}{\pi}=2$

③ π ④ $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$

⑤ $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

따라서 주어진 함수와 주기가 같은 함수는 ④이다.

답 ④

0656 $y=\tan\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$

이 함수의 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$

한편, 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$\pi x-\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $\pi x=n\pi+\pi$

$\therefore x=n+1$

$\therefore x=n$ (n은 정수)

답 ④

0657 함수 $f(x)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+b$의 최댓값이 4이고 $a>0$이므로

$a+b=4$ …… ㉠

또한 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=a\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+b$

$=a\sin\frac{\pi}{6}+b$

$=\frac{1}{2}a+b=\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-1$

$\therefore f(x)=5\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $-5-1=-6$

답 ②

0658 함수 $f(x)=a\tan bx$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore b=3$

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=a\tan\left(3\cdot\frac{\pi}{12}\right)=a\tan\frac{\pi}{4}=a=3$

$\therefore ab=9$

답 9

0659 $a>0$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $a+c$, 최솟값은 $-a+c$이다.

이때 조건 (가)에서 최댓값과 최솟값의 차가 6이므로

$a+c-(-a+c)=2a=6$ $\therefore a=3$

$b>0$이므로 조건 (나)에서

$\frac{2\pi}{b}=\frac{3}{2}\pi$ $\therefore b=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=3\cos\frac{4}{3}x+c$이므로 조건 (다)에서

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\cos\frac{\pi}{3}+c=\frac{3}{2}+c=\frac{1}{2}$ $\therefore c=-1$

$\therefore a+b+c=\frac{10}{3}$

답 $\frac{10}{3}$

0660 주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로 $a=2$

또 주기가 $\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x-c)$이고, 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나므로

$2\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=0$ $\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=0$

이때 $0<c<\pi$이므로 $c=\frac{\pi}{2}$

$\therefore a-b+2c=2-2+2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$

답 π

0661 주어진 그래프에서 함수의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore a=2$

주어진 그래프는 함수 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로

$y=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore a+2b=2+2\cdot\frac{\pi}{2}=2+\pi$

답 $2+\pi$

0662 주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로 $a=2$ ㉮

또 주기는 $3\pi-(-\pi)=4\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi$ $\therefore b=\frac{1}{2}$ ㉯

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\cos\left(\frac{1}{2}x+c\right)$이고, 그래프가 점 $(\pi, 2)$를 지나므로

$2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+c\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+c\right)=1$

이때 $0<c<2\pi$이므로 $c=\frac{3}{2}\pi$ ㉰

$\therefore abc=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi$ ㉱

답 $\frac{3}{2}\pi$

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	30 %
㉯	b의 값 구하기	30 %
㉰	c의 값 구하기	30 %
㉱	abc의 값 구하기	10 %

0663 주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 -4이고 $a>0$이므로

$a+b=4$, $-a+b=-4$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=0$

$\therefore y=4\cos\frac{\pi}{4}(2x+1)=4\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이고, 그래프에서 주기는 $2\left(c-\frac{1}{2}\right)$이므로

$2\left(c-\frac{1}{2}\right)=4$ $\therefore c=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b+c=4+0+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}$

답 $\frac{13}{2}$

0664 함수 $y=3\cos 5x$의 주기는 $\frac{2\pi}{5}$이다.

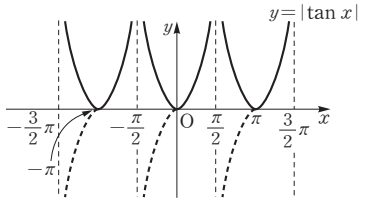
한편, 함수 $y=|\tan ax|$의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$이므로

$\frac{\pi}{|a|}=\frac{2\pi}{5}$

이때 a는 양수이므로 $a=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

0665 $y=|\tan x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



① 주기는 π이다.

② 최댓값은 존재하지 않는다.

③ 최솟값은 0이다.

④ 직선 $x=\frac{n}{2}\pi$ (n은 정수)에 대하여 대칭이다.

답 ⑤

0666 함수 $f(x)=a|\cos bx|+c$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로 $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore b=3$

$0\le|\cos bx|\le1$이므로 $c\le a|\cos bx|+c\le a+c$

함수 $f(x)$의 최댓값이 5이므로

$a+c=5$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$이므로

$a\left|\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right|+c=1 \quad \therefore c=1$

㉠에 $c=1$을 대입하면 $a+1=5 \quad \therefore a=4$

$\therefore a-b+c=4-3+1=2$

답 **2**

0667 조건 (가)에서 최댓값과 최솟값의 차가 2이고 최댓값은 $a+c$, 최솟값은 c이므로

$a=2$

조건 (나)에서 함수 $y=\cos 6x$의 주기는 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{3} \quad \therefore b=3$

$\therefore f(x)=2|\sin 3x|+c$

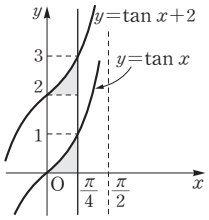
조건 (다)에서 함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$f(0)=2|\sin 0|+c=c=3 \quad \therefore c=3$

$\therefore a+b+c=8$

답 **8**

0668 $y=\tan x+2$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이는 같다.

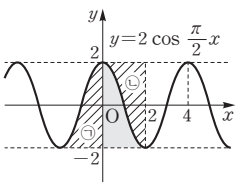


따라서 구하는 부분의 넓이는 네 점 $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, $(0, 2)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같으므로

$\frac{\pi}{4}\cdot 2=\frac{\pi}{2}$

답 ⑤

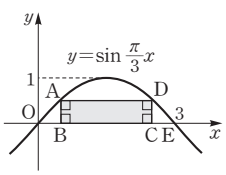
0669 함수 $y=2\cos\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 ㉠과 ㉡의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는



$2\cdot 4=8$

답 **8**

0670 함수 $y=\sin\frac{\pi}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로 점 E의 좌표는 $(3, 0)$이다.



$\overline{BC}=2$이므로

$\overline{OB}=\frac{1}{2}(\overline{OE}-\overline{BC})$

$=\frac{1}{2}\cdot(3-2)=\frac{1}{2}$

즉 점 A의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이므로 점 A의 y좌표는

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \quad \therefore A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$2\cdot\frac{1}{2}=1$

답 ①

0671 $\frac{\sin(\pi+\theta)\tan^2(\pi-\theta)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}+\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos^2(2\pi-\theta)}$

$=\frac{-\sin\theta\tan^2\theta}{-\sin\theta}+\frac{-\cos\theta}{\cos\theta\cos^2\theta}$

$=\tan^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta-1}{\cos^2\theta}=\frac{-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=-1$

답 ②

0672 ㄱ. $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ㄴ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

ㄷ. $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ ㄹ. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$

ㅁ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ ㅂ. $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

따라서 $\sin\theta$의 값과 같은 것은 ㄷ의 1개이다.

답 ①

0673 $\cos 100^\circ=\cos(90^\circ+10^\circ)=-\sin 10^\circ$

$=-0.1736$

$\tan 200^\circ=\tan(90^\circ\times 2+20^\circ)=\tan 20^\circ=0.3640$

$\therefore \cos 100^\circ+\tan 200^\circ=-0.1736+0.3640$

$=0.1904$

답 **0.1904**

0674 (1) $\sin 150^\circ=\sin(90^\circ\times 2-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ\times 2-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 135^\circ=\sin(90^\circ\times 2-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ\times 2-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cos 135^\circ=\cos(90^\circ\times 2-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 150^\circ=\cos(90^\circ\times 2-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

(2) $\cos 390^\circ=\cos(90^\circ\times4+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 300^\circ=\tan(90^\circ\times4-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

$\sin 420^\circ=\sin(90^\circ\times4+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 210^\circ=\sin(90^\circ\times2+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

$\tan 120^\circ=\tan(90^\circ\times2-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

$\cos(-300^\circ)=\cos 300^\circ=\cos(90^\circ\times3+30^\circ)$

$=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$

$=\frac{3-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}+\frac{1-4\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}-4}{2}+\frac{1-4\sqrt{3}}{2}$

$=-\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$

답 (1) $\mathbf{2\sqrt{2}}$ (2) $\mathbf{-\frac{3+3\sqrt{3}}{2}}$

0675 (1) (주어진 식)$=\dfrac{\cos\theta(-\sin\theta)}{\tan\theta}$

$+\sin\theta(-\tan\theta)\cos\theta$

$=-\cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{\tan\theta}+\tan\theta\right)$

$=-\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

$=-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=-1$

(2) (주어진 식)$=(-\cos\theta)^2+\sin^2\theta+(-\sin\theta)^2+\cos^2\theta$

$=2$

답 (1) $\mathbf{-1}$ (2) $\mathbf{2}$

0676 $\cos(-110^\circ)=\cos 110^\circ$

$=\cos(90^\circ\times2-70^\circ)$

$=-\cos 70^\circ=\alpha$

$\therefore \cos 70^\circ=-\alpha$

$\therefore \sin 250^\circ=\sin(90^\circ\times2+70^\circ)$

$=-\sin 70^\circ$

$=-\sqrt{1-\cos^2 70^\circ}$

$=-\sqrt{1-\alpha^2}$

답 ①

0677 $\theta=9^\circ$에서 $20\theta=180^\circ$이므로

$\cos 21\theta=\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$

$\cos 22\theta=\cos(180^\circ+2\theta)=-\cos 2\theta$

$\vdots$

$\cos 40\theta=\cos(180^\circ+20\theta)=-\cos 20\theta$

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 40\theta$

$=(\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 20\theta)$

$+(\cos 21\theta+\cos 22\theta+\cdots+\cos 40\theta)$

$=(\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 20\theta)$

$-(\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 20\theta)$

$=0$

답 ①

0678 $\frac{\pi}{4}+\theta=A$라 하면 $\theta=A-\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{\pi}{4}-\theta=\frac{\pi}{4}-\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-A$

$\therefore \sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sin^2 A+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$

$=\sin^2 A+\cos^2 A=1$

답 ②

0679 $\theta-40^\circ=A$라 하면 $\theta+50^\circ=A+90^\circ$

$\therefore \cos^2(\theta-40^\circ)+\cos^2(\theta+50^\circ)$

$=\cos^2 A+\cos^2(A+90^\circ)$

$=\cos^2 A+(-\sin A)^2$

$=\cos^2 A+\sin^2 A=1$

답 ②

0680 $\cos\frac{9}{20}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{20}\right)=\sin\frac{\pi}{20}$

$\cos\frac{7}{20}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{20}\pi\right)=\sin\frac{3}{20}\pi$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\left(\cos^2\frac{\pi}{20}+\cos^2\frac{9}{20}\pi\right)+\left(\cos^2\frac{3}{20}\pi+\cos^2\frac{7}{20}\pi\right)$

$+\cos^2\frac{5}{20}\pi$

$=\left(\cos^2\frac{\pi}{20}+\sin^2\frac{\pi}{20}\right)+\left(\cos^2\frac{3}{20}\pi+\sin^2\frac{3}{20}\pi\right)$

$+\cos^2\frac{\pi}{4}$

$=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 $\mathbf{\frac{5}{2}}$

0681 (1) $\cos^2 89^\circ=\cos^2(90^\circ-1^\circ)=\sin^2 1^\circ$

$\cos^2 87^\circ=\cos^2(90^\circ-3^\circ)=\sin^2 3^\circ$

$\vdots$

$\cos^2 47^\circ=\cos^2(90^\circ-43^\circ)=\sin^2 43^\circ$

$\therefore$ (주어진 식)

$=(\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+(\cos^2 3^\circ+\cos^2 87^\circ)$

$\quad+\cdots+(\cos^2 43^\circ+\cos^2 47^\circ)+\cos^2 45^\circ$

$=(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+(\cos^2 3^\circ+\sin^2 3^\circ)$

$\quad+\cdots+(\cos^2 43^\circ+\sin^2 43^\circ)+\cos^2 45^\circ$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{22\text{개}}+\frac{1}{2}$

$=22+\frac{1}{2}=\frac{45}{2}$

(2) $\sin^2 89^\circ=\sin^2(90^\circ-1^\circ)=\cos^2 1^\circ$

$\sin^2 88^\circ=\sin^2(90^\circ-2^\circ)=\cos^2 2^\circ$

$\vdots$

$\sin^2 46^\circ=\sin^2(90^\circ-44^\circ)=\cos^2 44^\circ$

$\therefore$ (주어진 식)

$=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)$

$\quad+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ$

$=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)$

$\quad+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\sin^2 45^\circ$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{44\text{개}}+\frac{1}{2}$

$=44+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}$

답 (1) $\frac{45}{2}$ (2) $\frac{89}{2}$

0682 $y=-|\sin x+2|+k$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=-|t+2|+k$

따라서 오른쪽 그림에서

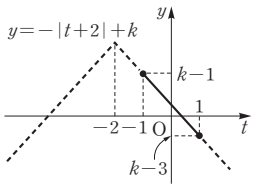
$t=-1$일 때 최댓값은 $k-1$,

$t=1$일 때 최솟값은 $k-3$이다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 1이므로

$k-1+k-3=1,\ 2k=5$

$\therefore k=\frac{5}{2}$



답 $\frac{5}{2}$

0683 $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로

$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\sin x-1$

$=-\sin x-2\sin x-1=-3\sin x-1$

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로 $-4\le -3\sin x-1\le 2$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -4이므로

$M=2,\ m=-4$

$\therefore M-m=6$

답 6

0684 $y=a|\cos 2x-1|+b$에서

$\cos 2x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=a|t-1|+b\ (a>0)$

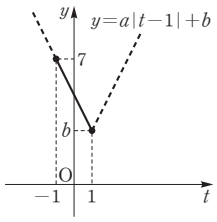
따라서 오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 최솟값은 b이므로 $b=3$

$t=-1$일 때 최댓값은 7이므로

$a|-1-1|+3=7 \quad \therefore a=2$

$\therefore a+b=5$



답 5

0685 $\cos(x-\pi)=\cos(\pi-x)=-\cos x$이므로

$y=|2+3\cos(x-\pi)|-1=|2-3\cos x|-1$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

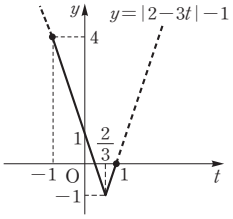
$y=|2-3t|-1$

따라서 오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값 $M=4$

$t=\frac{2}{3}$일 때 최솟값 $m=-1$

$\therefore M+m=4-1=3$



답 ③

0686 $y=-2\sin^2 x+2\cos x+1$

$=-2(1-\cos^2 x)+2\cos x+1$

$=2\cos^2 x+2\cos x-1$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

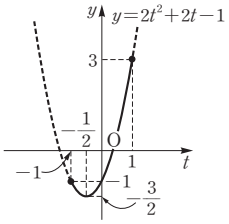
$y=2t^2+2t-1=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 최댓값 $M=3$

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $m=-\frac{3}{2}$

$\therefore M+m=\frac{3}{2}$



답 ③

0687 $y=\cos^2 x+2\sin x+2$

$=(1-\sin^2 x)+2\sin x+2$

$=-\sin^2 x+2\sin x+3$

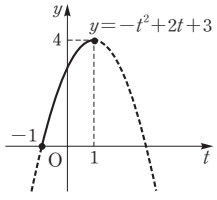
$\sin x=t$로 놓으면 $-\pi\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$

따라서 오른쪽 그림에서 $t=1$일 때

최댓값은 4이므로 $M=4$

$t=1$, 즉 $\sin x=1$일 때 $-\pi\le x\le\pi$에서



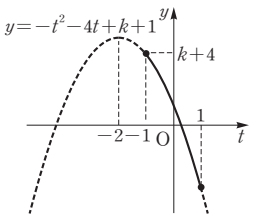
$x=\frac{\pi}{2}$이므로 $a=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore aM=\frac{\pi}{2}\cdot 4=2\pi$

답 ③

0688 $y=\sin^2 x-4\cos x+k$
$=(1-\cos^2 x)-4\cos x+k$
$=-\cos^2 x-4\cos x+k+1$ ……㉮

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는
$y=-t^2-4t+k+1$
$=-(t+2)^2+k+5$ ……㉯

따라서 오른쪽 그림에서
$t=-1$일 때 최댓값이 $k+4$이므로
$k+4=3$
$\therefore k=-1$ ……㉰



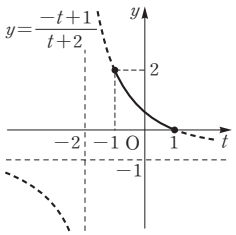
답 -1

단계	채점요소	배점
㉮	$\sin^2 x=1-\cos^2 x$임을 이용하여 $\cos x$에 대한 식으로 정리하기	40 %
㉯	$\cos x=t$로 치환하기	30 %
㉰	k의 값 구하기	30 %

0689 $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin(\pi+x)+a$
$=\sin x(-\sin x)-2(-\sin x)+a$
$=-\sin^2 x+2\sin x+a$
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$ …… ㉠
주어진 함수는 $y=-t^2+2t+a=-(t-1)^2+a+1$
따라서 ㉠의 범위에서 $t=1$일 때 최댓값이 $a+1$이므로
$a+1=3$ $\quad\therefore a=2$
따라서 $t=-1$일 때 최솟값은 -1이다.

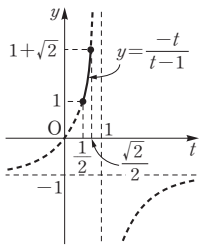
답 -1

0690 $y=\frac{-\sin x+1}{\sin x+2}$에서
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는
$y=\frac{-t+1}{t+2}=\frac{-(t+2)+3}{t+2}=\frac{3}{t+2}-1$
따라서 오른쪽 그림에서
$t=-1$일 때 최댓값 $M=2$
$t=1$일 때 최솟값 $m=0$
$\therefore M+m=2+0=2$



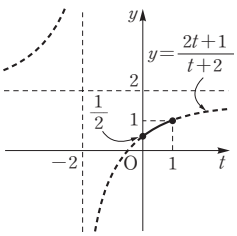
답 ②

0691 $y=\frac{-\cos x}{\cos x-1}$에서 $\cos x=t$로 놓으면
$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{1}{2}\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 주어진 함수는
$y=\frac{-t}{t-1}=-\frac{1}{t-1}-1$
따라서 오른쪽 그림에서
$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최댓값 $M=1+\sqrt{2}$
$t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $m=1$
$\therefore M-m=(1+\sqrt{2})-1=\sqrt{2}$



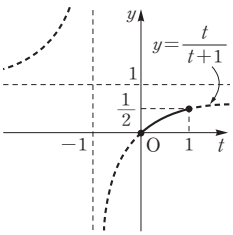
답 $\sqrt{2}$

0692 $y=\frac{2\tan x+1}{\tan x+2}$에서 $\tan x=t$로 놓으면
$0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le t\le 1$이고 주어진 함수는
$y=\frac{2t+1}{t+2}=\frac{2(t+2)-3}{t+2}=-\frac{3}{t+2}+2$
따라서 오른쪽 그림에서
$t=1$일 때 최댓값 $M=1$
$t=0$일 때 최솟값 $m=\frac{1}{2}$
$\therefore M+m=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$



답 $\frac{3}{2}$

0693 $y=\frac{|\sin x|}{|\sin x|+1}$에서
$|\sin x|=t$로 놓으면 $0\le t\le 1$이고 주어진 함수는
$y=\frac{t}{t+1}=\frac{(t+1)-1}{t+1}=-\frac{1}{t+1}+1$
따라서 오른쪽 그림에서
$t=1$일 때 최댓값은 $\frac{1}{2}$,
$t=0$일 때 최솟값은 0
이므로 주어진 함수의 치역은
$\left\{y\middle|0\le y\le\frac{1}{2}\right\}$이다.
따라서 $a=0$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $a+b=\frac{1}{2}$



답 $\frac{1}{2}$

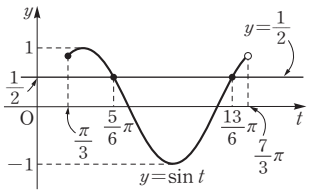
0694 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$에서 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$
$2x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$이고 주어진 방정식은 $\sin t=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이

$\frac{\pi}{3}\le t<\frac{7}{3}\pi$에서 함수

$y=\sin t$의 그래프와 직선

$y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$이므로



$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{11}{12}\pi=\frac{7}{6}\pi$

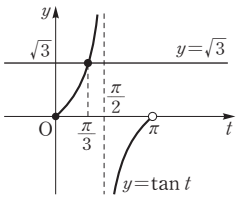
답 $\frac{7}{6}\pi$

0695 $\tan\frac{1}{2}x=\sqrt{3}$에서 $\frac{1}{2}x=t$로 놓으면

$0\le x<2\pi$에서 $0\le t<\pi$이고 주어진 방정식은 $\tan t=\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le t<\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$이므로

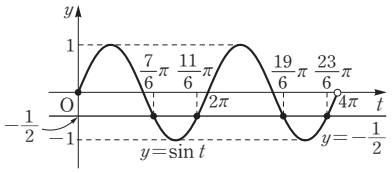
$\frac{1}{2}x=\frac{\pi}{3}$에서 $x=\frac{2}{3}\pi$



답 $x=\frac{2}{3}\pi$

0696 $\sin 2x=-\frac{1}{2}$에서 $2x=t$로 놓으면

$0\le x<2\pi$에서 $0\le t<4\pi$이고 주어진 방정식은 $\sin t=-\frac{1}{2}$



위의 그림과 같이 $0\le t<4\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, $\frac{19}{6}\pi$, $\frac{23}{6}\pi$이므로

$2x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $2x=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $2x=\frac{19}{6}\pi$ 또는 $2x=\frac{23}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

따라서 방정식 $\sin 2x=-\frac{1}{2}$의 근이 아닌 것은 ③이다.

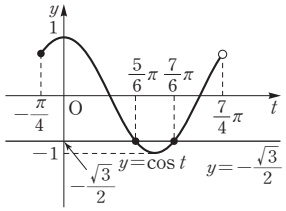
답 ③

0697 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$에서

$x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면

$0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$이고 주어진 방정식은

$\cos t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



위의 그림에서 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{7}{4}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$이므로

$x-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

따라서 구하는 차는 $\frac{17}{12}\pi-\frac{13}{12}\pi=\frac{4}{12}\pi=\frac{\pi}{3}$

답 $\frac{\pi}{3}$

0698 $2\sin^2 x-\cos x-1=0$에서

$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0$

$2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

$\therefore \cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$0\le x\le\pi$에서

$\cos x=\frac{1}{2}$일 때 $x=\frac{\pi}{3}$

$\cos x=-1$일 때 $x=\pi$

답 ③

0699 $3\sin x-2\cos^2 x=0$에서

$3\sin x-2(1-\sin^2 x)=0$, $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\sin x\le 1$)

$0\le x<2\pi$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$

답 π

0700 $\sqrt{2\sin^2 x+2\sin x+\cos^2 x}=\frac{1}{2}$에서

$\sqrt{2\sin^2 x+2\sin x+(1-\sin^2 x)}=\frac{1}{2}$

$\sqrt{\sin^2 x+2\sin x+1}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{(\sin x+1)^2}=\frac{1}{2}$

$|\sin x+1|=\frac{1}{2}$

$\sin x+1=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x+1=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin x=-\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\sin x\le1$)

$0\le x<2\pi$에서 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

답 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

0701 $3\cos^2x-1=\sin x\cos x$에서

$\sin^2x+\cos^2x=1$이므로

$3\cos^2x-(\sin^2x+\cos^2x)=\sin x\cos x$

$2\cos^2x-\sin x\cos x-\sin^2x=0$

$(2\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$ ㉮

$\therefore \cos x=-\frac{1}{2}\sin x$ 또는 $\cos x=\sin x$

즉 $\tan x=-2$ 또는 $\tan x=1$

그런데 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\tan x\ge0$이므로 $\tan x=1$ ㉯

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ ㉰

답 $x=\frac{\pi}{4}$

단계	채점요소	배점
㉮	$(2\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$으로 정리하기	50%
㉯	$\tan x=1$로 정리하기	30%
㉰	방정식의 해 구하기	20%

0702 $3\cos^2A-7\cos A+2=0$에서

$(3\cos A-1)(\cos A-2)=0$

$\therefore \cos A=\frac{1}{3}$ ($\because -1\le\cos A\le1$)

이때 $A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

$\therefore \sin(B+C)=\sin(\pi-A)$

$=\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}$ ($\because 0<A<\pi$)

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ①

0703 $4\cos^2A+4\sqrt{3}\sin A-7=0$에서

$4(1-\sin^2A)+4\sqrt{3}\sin A-7=0$

$4\sin^2A-4\sqrt{3}\sin A+3=0$

$(2\sin A-\sqrt{3})^2=0$, $2\sin A-\sqrt{3}=0$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로 $0<A<\frac{\pi}{2}$

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$

이때 $A+B+C=\pi$이므로 $\pi-(B+C)=A$

$\therefore \tan\{\pi-(B+C)\}=\tan A=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

답 ⑤

0704 $A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

$\therefore \sin\frac{B+C}{2}=\sin\frac{\pi-A}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$

따라서 주어진 방정식에서

$2\cos^2\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}-1=0$

$\left(2\cos\frac{A}{2}-1\right)\left(\cos\frac{A}{2}+1\right)=0$

이때 $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\cos\frac{A}{2}<1$

$\therefore \cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{3}$이므로 $A=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore \sin A=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0705 $4\cos^2A+4\sin A=5$에서

$4(1-\sin^2A)+4\sin A=5$

$4\sin^2A-4\sin A+1=0$

$(2\sin A-1)^2=0$ $\therefore \sin A=\frac{1}{2}$ ㉮

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}+B+C\right)=-\sin(B+C)$

$=-\sin(\pi-A)$ ($\because A+B+C=\pi$)

$=-\sin A=-\frac{1}{2}$ ㉯

답 $-\frac{1}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	$\sin A$의 값 구하기	50%
㉯	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+B+C\right)$의 값 구하기	50%

0706 주어진 그래프에서

두 점 $(a, 0)$, $(b, 0)$은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore a+b=\pi$

두 점 $(c, 0)$, $(d, 0)$은 직선 $x=\frac{5}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{c+d}{2}=\frac{5}{2}\pi$ $\therefore c+d=5\pi$

$\therefore a+b+c+d=\pi+5\pi=6\pi$

답 ③

0707 $y=\cos x$의 그래프에서 두 점 $(a, 0)$, $(c, 0)$은 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+c}{2}=\pi \quad \therefore a+c=2\pi$

$y=\sin x$의 그래프에서 두 점 $(b, 0)$, $(d, 0)$은 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{b+d}{2}=\frac{3}{2}\pi \quad \therefore b+d=3\pi$

$\therefore a+b+c+d=(a+c)+(b+d)$

$=2\pi+3\pi=5\pi$

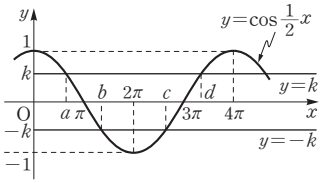
$\therefore \sin\frac{a+b+c+d}{4}=\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{4}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0708 $y=\cos\frac{1}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



두 점 $(b, 0)$, $(c, 0)$은 직선 $x=2\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{b+c}{2}=2\pi \quad \therefore b+c=4\pi$

두 점 $(c, 0)$, $(d, 0)$은 직선 $x=3\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{c+d}{2}=3\pi \quad \therefore c+d=6\pi$

$\therefore b+2c+d=(b+c)+(c+d)$

$=4\pi+6\pi=10\pi$

$\therefore \cos\frac{b+2c+d}{3}=\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0709 $\sin^2 x+2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+k=0$에서

$\sin^2 x-2\sin x+k=0$

$\therefore -\sin^2 x+2\sin x=k$

이 방정식이 실근을 가지려면 $y=-\sin^2 x+2\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

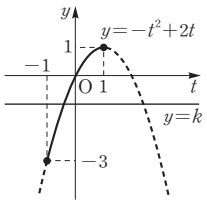
이때 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서

$-3\le k\le 1$

따라서 실수 k의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이므로 그 곱은 -3이다.



답 ①

0710 $\sin^2 x+\cos x+a=0$에서

$(1-\cos^2 x)+\cos x+a=0$

$\therefore \cos^2 x-\cos x-1=a$

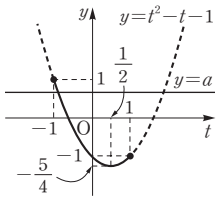
이 방정식이 실근을 가지려면 $y=\cos^2 x-\cos x-1$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-t-1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서

$-\frac{5}{4}\le a\le 1$



답 $-\frac{5}{4}\le a\le 1$

0711 $\sin^2\theta-2\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)-a-1=0$에서

$\sin^2\theta-2\sin\theta-a-1=0$

$\therefore \sin^2\theta-2\sin\theta-1=a$ ..... ㉮

이 방정식을 만족시키는 θ가 존재하려면

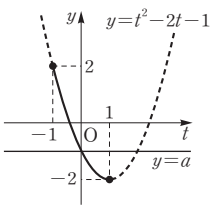
$y=\sin^2\theta-2\sin\theta-1$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\sin\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$ ..... ㉯

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 θ가 존재하려면 오른쪽 그림에서

$-2\le a\le 2$ ..... ㉰



답 $-2\le a\le 2$

단계	채점요소	배점
㉮	한 종류의 삼각함수로 나타내기	30 %
㉯	$\sin x=t$로 놓고 t에 대한 식 세우기	40 %
㉰	a의 값의 범위 구하기	30 %

0712 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin(\pi+x)=k$에서

$(-\sin x)(\sin x)-4\sin x=k$

$\therefore -\sin^2 x-4\sin x=k$

이 방정식이 실근을 가지려면 $y=-\sin^2 x-4\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

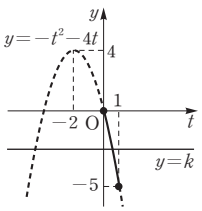
이때 $\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서

$0\le t\le 1$

$y=-t^2-4t=-(t+2)^2+4$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서

$-5\le k\le 0$



답 $-5\le k\le 0$

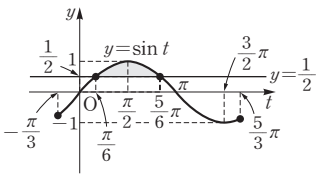
0713 $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\ge\frac{1}{2}$에서 $x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면

$0\le x\le 2\pi$이므로

$-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}\le 2\pi-\frac{\pi}{3}$, 즉 $-\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{5}{3}\pi$이고

주어진 부등식은 $\sin t\ge\frac{1}{2}$ …… ㉠

부등식 ㉠의 해는 $y=\sin t$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽(경계선 포함)에 있는 t의 값의 범위이므로



$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5}{6}\pi$

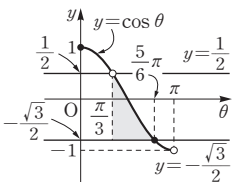
즉 $\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{5}{6}\pi$ $\therefore \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{7}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{7}{6}\pi$이므로 $\alpha+\beta=\frac{5}{3}\pi$

답 $\frac{5}{3}\pi$

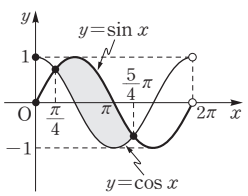
0714 $0\le\theta<\pi$이므로 오른쪽 그림에서 부등식 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\theta<\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{3}<\theta\le\frac{5}{6}\pi$



답 ④

0715 부등식 $\sin x\ge\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프와 만나거나 그 위쪽에 있는 x의 값의 범위이다. 이때 $0\le x<2\pi$이므로 오른쪽 그림에서 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi$



따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0716 각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로 $\alpha+\beta=\pi$ …… ㉠

연립부등식 $\begin{cases}2\cos\alpha<\sqrt{3}\\ 2\sin\alpha\le\sqrt{2}\end{cases}$에서

(i) $2\cos\alpha<\sqrt{3}$에서 $\cos\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ $\left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

(ii) $2\sin\alpha\le\sqrt{2}$에서 $\sin\alpha\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 0<\alpha\le\frac{\pi}{4}$ $\left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

(i), (ii)에서 $\frac{\pi}{6}<\alpha\le\frac{\pi}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{\pi}{6}<\pi-\beta\le\frac{\pi}{4}$, $-\frac{5}{6}\pi<-\beta\le-\frac{3}{4}\pi$

$\therefore \frac{3}{4}\pi\le\beta<\frac{5}{6}\pi$

답 $\frac{3}{4}\pi\le\beta<\frac{5}{6}\pi$

0717 $2\sin^2 x>3\cos x$에서

$2(1-\cos^2 x)>3\cos x$

$2\cos^2 x+3\cos x-2<0$

$(2\cos x-1)(\cos x+2)<0$

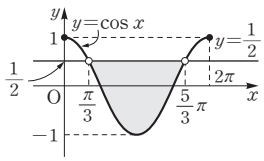
이때 $-1\le\cos x\le 1$에서 $\cos x+2>0$이므로

$2\cos x-1<0$ $\therefore \cos x<\frac{1}{2}$

$0\le x\le 2\pi$이므로 오른쪽 그림에서

$\cos x<\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$



따라서 $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{5}{3}\pi$이므로

$a+b=2\pi$

답 ⑤

0718 $2\cos^2 x<\sin x+1$에서

$2(1-\sin^2 x)<\sin x+1$

$2\sin^2 x+\sin x-1>0$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)>0$

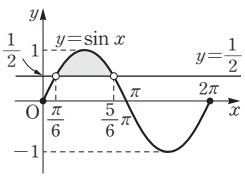
이때 $\sin x+1\ge 0$이므로

$2\sin x-1>0$ $\therefore \sin x>\frac{1}{2}$

$0\le x\le 2\pi$이므로 오른쪽 그림에서

$\sin x>\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$



답 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$

0719 $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

이므로 $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\geq 0$에서

$2\left\{1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\geq 0$

이때 $x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\leq x<2\pi$이므로

$-\frac{\pi}{3}\leq x-\frac{\pi}{3}<2\pi-\frac{\pi}{3}$, 즉 $-\frac{\pi}{3}\leq t<\frac{5}{3}\pi$이고

주어진 부등식은

$2\sin^2 t-\sin t-1\leq 0$

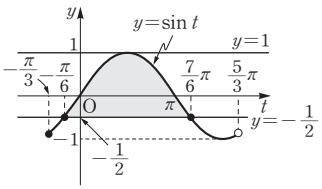
$(2\sin t+1)(\sin t-1)\leq 0$

$\therefore -\frac{1}{2}\leq\sin t\leq 1$

$-\frac{\pi}{3}\leq t<\frac{5}{3}\pi$이므로

오른쪽 그림에서

$-\frac{1}{2}\leq\sin t\leq 1$의 해는



$-\frac{\pi}{6}\leq t\leq\frac{7}{6}\pi$

즉 $-\frac{\pi}{6}\leq x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{7}{6}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{3}{2}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{3}{2}\pi}{\frac{\pi}{6}}=9$

답 **9**

0720 $\cos^2\theta+4\sin\theta\leq 2a$에서

$(1-\sin^2\theta)+4\sin\theta\leq 2a$

$\therefore \sin^2\theta-4\sin\theta+2a-1\geq 0$

이때 $\sin\theta=t$로 놓으면 $-1\leq t\leq 1$이고 주어진 부등식은

$t^2-4t+2a-1\geq 0$ ····· ㉠

함수

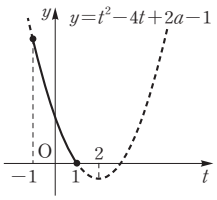
$y=t^2-4t+2a-1=(t-2)^2+2a-5$

는 $t=1$일 때 최솟값을 가지므로

$-1\leq t\leq 1$에서 ㉠이 항상 성립하려면

$1-4+2a-1\geq 0$

$\therefore a\geq 2$



답 $a\geq 2$

0721 $x^2-2x\sin\theta-3\cos^2\theta+2\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 x에 대한 이차방정식

$x^2-2x\sin\theta-3\cos^2\theta+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\sin^2\theta-(-3\cos^2\theta+2)\leq 0$

$\sin^2\theta+3\cos^2\theta-2\leq 0$

$(1-\cos^2\theta)+3\cos^2\theta-2\leq 0$

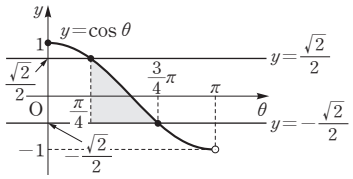
$2\cos^2\theta-1\leq 0$

$(\sqrt{2}\cos\theta+1)(\sqrt{2}\cos\theta-1)\leq 0$

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\cos\theta\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\leq\theta<\pi$이므로 오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3}{4}\pi$



답 $\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3}{4}\pi$

0722 (1) $x^2-4x\sin\theta+1=0$이 중근을 가지려면 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=4\sin^2\theta-1=0$

$(2\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$

$0<\theta<\pi$에서 $0<\sin\theta\leq 1$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

(2) $x^2+2x\cos\theta+\sin\theta+1=0$이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-(\sin\theta+1)\geq 0$

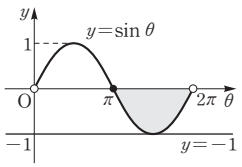
$(1-\sin^2\theta)-(\sin\theta+1)\geq 0$

$\sin^2\theta+\sin\theta\leq 0$, $\sin\theta(\sin\theta+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq\sin\theta\leq 0$

$0<\theta<2\pi$이므로 오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$\pi\leq\theta<2\pi$



답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\pi\leq\theta<2\pi$

0723 x에 대한 이차방정식 $x^2-3x+\sin^2\theta-3\cos^2\theta=0$이 서로 다른 부호의 실근을 가지려면 두 근의 곱이 음수이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin^2\theta-3\cos^2\theta<0$

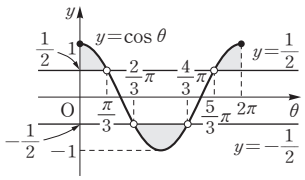
$(1-\cos^2\theta)-3\cos^2\theta<0$

$1-4\cos^2\theta<0$, $4\cos^2\theta-1>0$

$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)>0$

$\therefore \cos\theta<-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos\theta>\frac{1}{2}$

$0 \le \theta \le 2\pi$이므로 다음 그림에서 θ의 값의 범위는



$0 \le \theta < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi < \theta \le 2\pi$

따라서 θ의 값으로 옳지 않은 것은 ③ $\frac{2}{5}\pi$이다.

답 ③

0724 x에 대한 이차방정식 $x^2-2x\cos\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta-1=0$이 허근을 가지려면 판별식을 D라 할 때

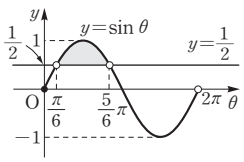
$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-(\cos^2\theta+2\sin\theta-1)<0$

$-2\sin\theta+1<0$

$\therefore \sin\theta>\frac{1}{2}$ ㉮

$0 \le \theta < 2\pi$이므로 오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$



㉯

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ㉰

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	판별식을 이용하여 허근을 가질 $\sin\theta$의 값의 범위 구하기	40 %
㉯	θ의 값의 범위 구하기	40 %
㉰	$\sin(\beta-\alpha)$의 값 구하기	20 %

유형 up

본문 91쪽

0725 $A+B+C=\pi$이므로

ㄱ. $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi-A}{2}\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$

$=\cos\frac{A}{2}$ (참)

ㄴ. $\tan(B+C)=\tan(\pi-A)=-\tan A$ (거짓)

ㄷ. $\tan A+\tan(B+C)=\tan A+\tan(\pi-A)$

$=\tan A-\tan A=0$ (참)

ㄹ. $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$이므로

$-\cos A>0$에서 $\cos A<0$

$\frac{\pi}{2}<A<\pi$이므로 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0726 $A+C=\pi$, $B+D=\pi$이므로

$C=\pi-A$, $D=\pi-B$

ㄱ. $\sin A+\sin B+\sin C+\sin D$

$=\sin A+\sin B+\sin(\pi-A)+\sin(\pi-B)$

$=2(\sin A+\sin B)>0$ ($\because 0<A<\pi$, $0<B<\pi$) (거짓)

ㄴ. $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$

$=\cos A+\cos B+\cos(\pi-A)+\cos(\pi-B)$

$=\cos A+\cos B-\cos A-\cos B=0$ (참)

ㄷ. $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D$

$=\tan A+\tan B+\tan(\pi-A)+\tan(\pi-B)$

$=\tan A+\tan B-\tan A-\tan B=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0727 $10\theta=2\pi$에서 $5\theta=\pi$이므로

① $\sin 6\theta=\sin(5\theta+\theta)=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\therefore \sin\theta+\sin 6\theta=0$

② $\sin(-5\theta)=-\sin 5\theta=-\sin\pi=0$

$\sin\theta\neq0$이므로 $\sin\theta+\sin(-5\theta)\neq0$

③ $\cos 4\theta=\cos(5\theta-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \cos 2\theta+\cos 4\theta=\cos 2\theta-\cos\theta\neq0$

④ $\cos 4\theta=\cos(5\theta-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\cos 6\theta=\cos(5\theta+\theta)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \cos 4\theta=\cos 6\theta$

⑤ $\sin\theta$는 점 P_1의 y좌표이고, $\cos 3\theta$는 점 P_3의 x좌표이므로

$\sin\theta\neq\cos 3\theta$

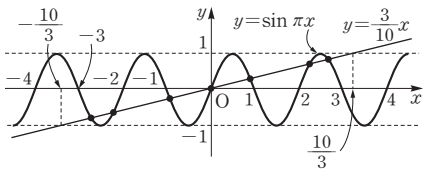
답 ④

0728 방정식 $\sin\pi x=\frac{3}{10}x$의 서로 다른 실근의 개수는

$y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{10}x$의 교점의 개수와 같다.

$y=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 함수 $y=\sin\pi x$와

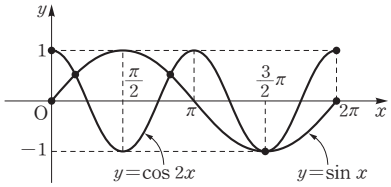
$y=\frac{3}{10}x$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 두 그래프의 교점의 개수가 7이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

답 ④

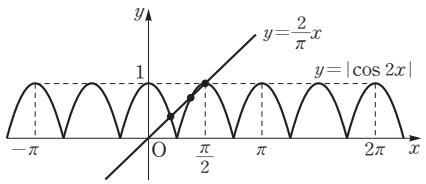
0729 $0 \le x \le 2\pi$에서 방정식 $\sin x = \cos 2x$의 실근의 개수는 $y=\sin x$와 $y=\cos 2x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
$0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$와 $y=\cos 2x$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 두 그래프의 교점의 개수가 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 **3**

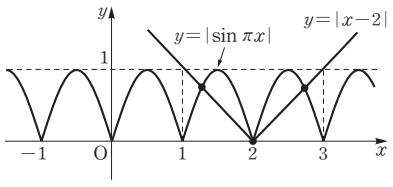
0730 방정식 $|\cos 2x| = \frac{2}{\pi}x$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=|\cos 2x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{\pi}x$의 교점의 개수와 같다.
$y=|\cos 2x|$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 함수 $y=|\cos 2x|$와 $y=\frac{2}{\pi}x$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 두 그래프의 교점의 개수는 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 **3**

0731 $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 \pi x}=\sqrt{\sin^2 \pi x}=|\sin \pi x|$
이고 $y=|\sin \pi x|$의 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$이다.



위의 그림에서 $f(x)=|\sin \pi x|$와 $g(x)=|x-2|$의 그래프의 교점의 개수가 3이므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$,
즉 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 ②

시험에 꼭 나오는 문제 본문 92~95쪽

0732 각 함수의 주기를 구해 보면 다음과 같다.
① 2π ② 2π ③ π
④ $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$ ⑤ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$
따라서 주기가 가장 긴 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0733 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+8)=f(x)$를 만족시키므로 함수 $f(x)$는 주기함수이고 주기를 p라 할 때, $pn=8$을 만족시키는 정수 n이 존재해야 한다.
① 함수의 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 $2\times 4=8$
② 함수의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{4}{3}$이므로 $\frac{4}{3}\times 6=8$
③ 함수의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{5}{2}\pi}=\frac{4}{5}$이므로 $\frac{4}{5}\times 10=8$
④ 함수의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로 $6n=8$을 만족시키는 정수 n이 존재하지 않는다. 따라서 $f(x+8)=f(x)$를 만족시키지 않는다.
⑤ 함수의 주기가 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}\times 16=8$

답 ④

0734 ① 최댓값은 $1+1=2$이다.
② 최솟값은 $-1+1=0$이다.
③ 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.
④ $f(0)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=-\sin\frac{\pi}{4}+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
따라서 그래프는 점 $\left(0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$를 지난다.
⑤ $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+1$
따라서 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

답 ⑤

0735 $y=\cos 2x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면

$y=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1=\cos(2x-\pi)+1$

$=\cos(\pi-2x)+1$

$=-\cos 2x+1$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=-\cos(-2x)+1=-\cos 2x+1$

답 ④

0736 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=-3f(x)+2$

$=-3(a\sin x-b)+2$

$=-3a\sin x+3b+2$

이때 $a>0$에서 $-3a<0$

최댓값이 11이므로

$|-3a|+3b+2=11$

$3a+3b=9 \quad \therefore a+b=3$ ····· ㉠

최솟값이 -13이므로

$-|-3a|+3b+2=-13$

$-3a+3b=-15 \quad \therefore a-b=5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-1$

$\therefore ab=4\cdot(-1)=-4$

답 -4

0737 주어진 그래프에서 함수의 주기가 $\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=\pi \quad \therefore a=2$

주어진 함수의 그래프는 $y=\cos 2x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것이므로

$-b=-\frac{\pi}{3} \quad \therefore b=\frac{\pi}{3}$

$\therefore ab=2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

답 $\frac{2}{3}\pi$

0738 함수 $y=\tan ax$의 주기가 2π이므로 $\frac{\pi}{a}=2\pi$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

함수 $y=\tan\frac{1}{2}x$ $(0\le x<3\pi)$의 그래프와 x축 및 직선 $y=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이는 가로의 길이가 2π, 세로의 길이가 $\frac{1}{2}$인 직사각형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$

답 π

0739 $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$

$\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)=\cos\theta$, $\sin(3\pi-\theta)=\sin\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\frac{(-\cos\theta)(-\tan\theta)}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta(-\tan\theta)}{-\sin\theta}$

$=\tan\theta-\tan\theta$

$=0$

답 ③

0740 $\cos^2(\pi-\theta)=\cos^2\theta$이므로

$\cos^2\frac{\pi}{10}=\cos^2\frac{9}{10}\pi$

$\cos^2\frac{2}{10}\pi=\cos^2\frac{8}{10}\pi$

$\cos^2\frac{3}{10}\pi=\cos^2\frac{7}{10}\pi$

$\cos^2\frac{4}{10}\pi=\cos^2\frac{6}{10}\pi$

또한 $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin^2\theta$이므로

$\cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{4}{10}\pi=\cos^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{\pi}{10}=1$

$\cos^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{3}{10}\pi=\cos^2\frac{2}{10}\pi+\sin^2\frac{2}{10}\pi=1$

$\therefore \left(\cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{2}{10}\pi+\cdots+\cos^2\frac{9}{10}\pi\right)-\cos^2\frac{\pi}{2}$

$=2\left(\cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{3}{10}\pi+\cos^2\frac{4}{10}\pi\right)$

$+\cos^2\frac{5}{10}\pi-\cos^2\frac{\pi}{2}$

$=2\left(\cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{3}{10}\pi+\cos^2\frac{4}{10}\pi\right)$

$=2(1+1)=4$

답 ①

0741 $y=|\cos x-a|+2a$에서

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$ ····· ㉠

주어진 함수는 $y=|t-a|+2a$이므로 ㉠의 범위에서

$t=a$일 때 최솟값 1을 가지므로 $2a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $y=\left|t-\frac{1}{2}\right|+1$이므로

$t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{5}{2}$이다.

답 $\frac{5}{2}$

0742 $y=\sin^2x-\cos x-a$

$=(1-\cos^2x)-\cos x-a$

$=-\cos^2x-\cos x+1-a$

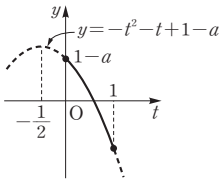
이때 $\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le t\le 1$이고

주어진 함수는

$y=-t^2-t+1-a=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}-a$

따라서 오른쪽 그림에서 $t=0$일 때 최댓값은 $1-a$이므로

$1-a=\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{3}{4}$



답 $\frac{3}{4}$

0743 $y=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{3\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}{3-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\tan\theta+1}{3-\tan\theta}$

이때 $\tan\theta=t$로 놓으면 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le t\le1$이고

주어진 함수는

$y=\frac{t+1}{3-t}=-\frac{t+1}{t-3}$

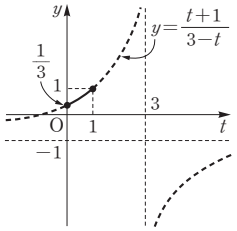
$=-\frac{(t-3)+4}{t-3}=-\frac{4}{t-3}-1$

따라서 오른쪽 그림에서

$t=1$일 때 최댓값 $\alpha=1$

$t=0$일 때 최솟값 $\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore \alpha-\beta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$



답 $\frac{2}{3}$

0744 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$, $\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$

이므로 주어진 방정식은

$\cos\theta+\sin\theta=-\cos\theta-\sin\theta$

$2\sin\theta=-2\cos\theta$, $\sin\theta=-\cos\theta$

$\therefore \tan\theta=-1$

따라서 $0\le\theta\le2\pi$에서 주어진 방정식의 해는

$\theta=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{4}\pi$

이므로 모든 θ의 값의 합은 $\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$

답 ④

0745 $\log(\sin\theta)-\log(\cos\theta)=\frac{1}{2}\log3$에서

$\log\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\log\sqrt{3}$, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{3}$

$\tan\theta=\sqrt{3}$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

답 $\frac{\pi}{3}$

0746 $\sqrt{3}\sin^2x-2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2x=0$의 양변을 $\cos^2x$로 나누면

$\sqrt{3}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2-2\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)-\sqrt{3}=0$

$\sqrt{3}\tan^2x-2\tan x-\sqrt{3}=0$

$(\sqrt{3}\tan x+1)(\tan x-\sqrt{3})=0$

$\therefore \tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 또는 $\tan x=\sqrt{3}$

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서

(i) $\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때, $x=\frac{5}{6}\pi$

(ii) $\tan x=\sqrt{3}$일 때, $x=\frac{4}{3}\pi$

(i), (ii)에서 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{5}{6}\pi+\frac{4}{3}\pi=\frac{13}{6}\pi$

답 $\frac{13}{6}\pi$

0747 $y=x^2-2x\sin\theta-\cos^2\theta$

$=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=(x-\sin\theta)^2-1$

꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta,\ -1)$이고 이 점이 직선 $y=2\sqrt{3}x+2$ 위에 있으므로

$-1=2\sqrt{3}\sin\theta+2$, $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \theta=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$ $(\because 0\le\theta<2\pi)$

답 $\theta=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$

0748 $\cos A=-\frac{1}{2}$이므로 $A=\frac{2}{3}\pi$ $(\because 0<A<\pi)$

이때 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π이므로

$A+B+C=\pi$ $\therefore B+C=\pi-A$

$\therefore \sin\frac{B+C-2\pi}{2}=\sin\frac{\pi-A-2\pi}{2}$

$=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)$

$=-\cos\frac{A}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}$

답 ②

0749 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$을 대입하면

$\sin^2\alpha+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1$

$\therefore \sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $(\because 0<\alpha<\pi)$

사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\alpha+\beta=\pi$

$\sin\alpha=\sin(\pi-\beta)=\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\alpha=\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta=\frac{1}{3}$ $\therefore \cos\beta=-\frac{1}{3}$

$\therefore \tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-2\sqrt{2}$

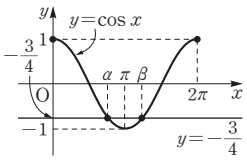
답 $-2\sqrt{2}$

0750 방정식 $\cos x=-\frac{3}{4}$의 두 근이 α, β이므로 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{4}$의 교점의 x좌표는 α, β이다.

오른쪽 그림에서 함수 $y=\cos x$의 그래프의 대칭성에 의하여

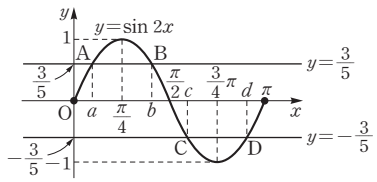
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$이므로 $\alpha+\beta=2\pi$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin 2\pi=0$



답 ③

0751 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 $y=\sin 2x$의 그래프는 다음과 같다.



두 점 A, B는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\therefore a+b=\frac{\pi}{2}$ …… ㉠

두 점 C, D는 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{c+d}{2}=\frac{3}{4}\pi$ $\therefore c+d=\frac{3}{2}\pi$ …… ㉡

두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{b+c}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore b+c=\pi$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a+2b+2c+d=(a+b)+(b+c)+(c+d)$

$=\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3}{2}\pi=3\pi$

답 3π

0752 $2\sin^2 x-3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\geq 2\cos x-4\cos^2 x$에서

$2\sin^2 x-3\cos x\geq 2\cos x-4\cos^2 x$

$2(1-\cos^2 x)-3\cos x\geq 2\cos x-4\cos^2 x$

$2\cos^2 x-5\cos x+2\geq 0$

$(2\cos x-1)(\cos x-2)\geq 0$

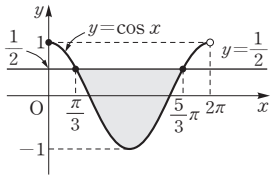
그런데 $\cos x-2<0$이므로

$\cos x\leq\frac{1}{2}$

$0\leq x<2\pi$이므로 오른쪽 그림에서

$\cos x\leq\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{5}{3}\pi$



답 $\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{5}{3}\pi$

0753 $\sin^2 x+\sin x=\cos^2 x+\cos x$에서

$(\sin^2 x-\cos^2 x)+(\sin x-\cos x)=0$

$(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)=0$

$(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x+1)=0$

$\therefore \sin x-\cos x=0$ 또는 $\sin x+\cos x+1=0$

(i) $\sin x=\cos x$일 때

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ ($\because 0\leq x<2\pi$)

(ii) $\sin x+\cos x+1=0$일 때

$\sin x+1=-\cos x$ …… ㉠

양변을 제곱하면

$\sin^2 x+2\sin x+1=\cos^2 x$

$\sin^2 x+2\sin x+1=1-\sin^2 x$

$2\sin x(\sin x+1)=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=-1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\leq x<2\pi$)

그런데 $x=0$은 ㉠을 만족시키지 못하므로

$x=\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근은 $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$이므로

$a=4$, $b=\frac{3}{2}\pi$, $c=\frac{\pi}{4}$

$\therefore a\cos(b+c)=4\cos\frac{7}{4}\pi=4\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

0754 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값이 4π이므로 함수 $f(x)=a\sin b\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+c$의 주기는 4π이다.

$b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=4\pi$

$\therefore b=\frac{1}{2}$

한편, 함수 $f(x)$의 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로 가

$a+c=1$, $-a+c=-3$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=2$, $c=-1$

㉯

$\therefore abc=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)=-1$

㉰

답 -1

단계	채점요소	배점
㉮	b의 값 구하기	50 %
㉯	a, c의 값 구하기	40 %
㉰	abc의 값 구하기	10 %

0755 $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)+1\right\}^2$
$=2\sin(\pi-\theta)\cos(2\pi-\theta)+3$에서
$(\cos\theta+\sin\theta+1)^2=2\sin\theta\cos\theta+3$

㉮

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+1+2(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)$
$=2\sin\theta\cos\theta+3$
$2+2\sin\theta\cos\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)=2\sin\theta\cos\theta+3$
$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$

㉯

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$
$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$
$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

㉰

답 $-\frac{3}{8}$

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 식을 간단히 정리하기	30 %
㉯	$\sin\theta+\cos\theta$의 값 구하기	30 %
㉰	$\sin\theta\cos\theta$의 값 구하기	40 %

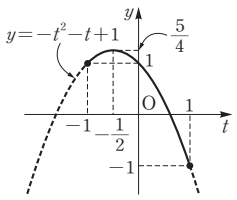
0756 $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로
$y=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
$=\cos^2 x-\sin x$
$=(1-\sin^2 x)-\sin x$
$=-\sin^2 x-\sin x+1$

㉮

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $-\pi\le x\le\pi$에서 $-1\le t\le1$이고
주어진 함수는
$y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

㉯

따라서 오른쪽 그림에서
$t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{5}{4}$,
$t=1$일 때 최솟값은 -1이므로
최댓값과 최솟값의 합은
$\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$



㉰

답 $\frac{1}{4}$

단계	채점요소	배점
㉮	함수의 식 정리하기	40 %
㉯	$\sin x=t$로 치환하기	20 %
㉰	최댓값과 최솟값의 합 구하기	40 %

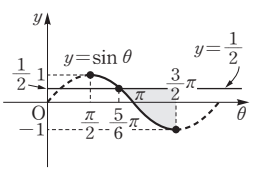
0757 x에 대한 이차방정식 $x^2+2\sqrt{2}x\cos\theta+3\sin\theta=0$이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\cos\theta)^2-3\sin\theta\ge0$

㉮

$2\cos^2\theta-3\sin\theta\ge0$
$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta\ge0$
$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2\le0$
$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)\le0$
이때 $\sin\theta+2>0$이므로
$2\sin\theta-1\le0$
$\therefore \sin\theta\le\frac{1}{2}$

㉯

$\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$이므로 오른쪽 그림에서
주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는
θ의 값의 범위는
$\frac{5}{6}\pi\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$



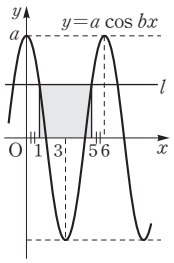
㉰

답 $\frac{5}{6}\pi\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$

단계	채점요소	배점
㉮	판별식을 이용하여 실근을 가질 부등식 세우기	30 %
㉯	$\sin\theta$의 값의 범위 구하기	40 %
㉰	θ의 값의 범위 구하기	30 %

0758 $\frac{1+5}{2}=3$이므로 함수 $y=a\cos bx$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

$y=a\cos bx$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 함수의 주기는 6이다.



즉 $\frac{2\pi}{b}=6$ $\therefore b=\frac{\pi}{3}$

이때 $f(x)=a\cos\frac{\pi}{3}x$로 놓으면

$f(1)=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}$

또 색칠한 직사각형의 넓이가 20이므로

$4\cdot\frac{a}{2}=20$ $\therefore a=10$

답 **10**

0759 $\tan 179^\circ=\tan(180^\circ-1^\circ)=-\tan 1^\circ$

$\tan 159^\circ=\tan(180^\circ-21^\circ)=-\tan 21^\circ$

$\tan 139^\circ=\tan(180^\circ-41^\circ)=-\tan 41^\circ$

$\tan 119^\circ=\tan(180^\circ-61^\circ)=-\tan 61^\circ$

$\tan 99^\circ=\tan(180^\circ-81^\circ)=-\tan 81^\circ$

$\therefore A+B$

$=(\tan 1^\circ+\tan 179^\circ)+(\tan 21^\circ+\tan 159^\circ)$

$+\cdots+(\tan 81^\circ+\tan 99^\circ)$

$=(\tan 1^\circ-\tan 1^\circ)+(\tan 21^\circ-\tan 21^\circ)$

$+\cdots+(\tan 81^\circ-\tan 81^\circ)$

$=0$

답 **0**

0760 $\cos^2 x+(a+2)\sin x-(2a+1)>0$에서

$(1-\sin^2 x)+(a+2)\sin x-(2a+1)>0$

$\sin^2 x-(a+2)\sin x+2a<0$

$\therefore(\sin x-2)(\sin x-a)<0$

모든 실수 x에 대하여 $\sin x-2<0$이므로

$\sin x-a>0$

$\therefore \sin x>a$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a<-1$

답 $a<-1$

0761 이차방정식 $x^2-(4\cos\theta)x+6\sin\theta=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면

(i) $\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta>0$

$4(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta>0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2<0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)<0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $\sin\theta+2>0$이므로

$2\sin\theta-1<0$

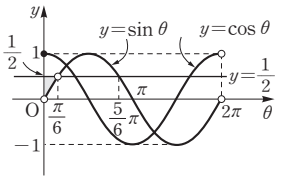
$\therefore \sin\theta<\frac{1}{2}$

(ii) 두 근의 합 : $4\cos\theta>0$ $\therefore\cos\theta>0$

(iii) 두 근의 곱 : $6\sin\theta>0$ $\therefore\sin\theta>0$

(i), (ii), (iii)에서 $0<\sin\theta<\frac{1}{2}$, $\cos\theta>0$

오른쪽 그림에서 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이므로



$\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \sin\alpha+\cos\beta$

$=\sin 0+\cos\frac{\pi}{6}$

$=0+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ②

07 삼각함수의 활용

교과서 문제 정복하기

본문 97쪽

0762 사인법칙에 의하여 $\frac{c}{\sin 45^\circ}=\frac{4}{\sin 60^\circ}$이므로

$c\sin 60^\circ=4\sin 45^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2}c=2\sqrt{2}$

$\therefore c=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

답 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

0763 사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin 30^\circ}=\frac{5}{\sin 45^\circ}$이므로

$b\sin 45^\circ=5\sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{2}}{2}b=\frac{5}{2}$

$\therefore b=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

0764 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 30^\circ}=\frac{12}{\sin 120^\circ}$이므로

$a\sin 120^\circ=12\sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2}a=6$

$\therefore a=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

답 $4\sqrt{3}$

0765 사인법칙에 의하여 $\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$이므로

$\sqrt{2}\sin A=\sin 135^\circ$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

그런데 $A+C<180^\circ$이어야 하므로

$A=30^\circ$

답 30°

0766 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin 30^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$이므로

$2\sin B=2\sqrt{2}\sin 30^\circ$

$\therefore \sin B=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=45^\circ$ 또는 $B=135^\circ$

답 45° 또는 135°

0767 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sin C}$이므로

$2\sin C=\sqrt{6}\sin 45^\circ$

$\therefore \sin C=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=60^\circ$ 또는 $C=120^\circ$

답 60° 또는 120°

0768 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=1$

답 1

0769 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(100^\circ+50^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{6}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=6$

답 6

0770 $b=c=2$에서 $\triangle ABC$는 $B=C$인 이등변삼각형이므로

$B=C=\frac{1}{2}(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{2}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=2$

답 2

0771 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{12}{\sin 150^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{12}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}=12$

따라서 $\triangle ABC$의 외접원의 넓이는

$\pi\cdot 12^2=144\pi$

답 144π

0772 코사인법칙에 의하여

$a^2=5^2+7^2-2\cdot 5\cdot 7\cdot\cos 60^\circ$

$=25+49-2\cdot 5\cdot 7\cdot\frac{1}{2}=39$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{39}$

답 $\sqrt{39}$

0773 코사인법칙에 의하여

$b^2=3^2+6^2-2\cdot 3\cdot 6\cdot\cos 60^\circ$

$=9+36-2\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=27$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

답 $3\sqrt{3}$

0774 코사인법칙에 의하여

$c^2=12^2+6^2-2\cdot12\cdot6\cdot\cos 120^\circ$

$=144+36-2\cdot12\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=252$

$c>0$이므로 $c=\sqrt{252}=6\sqrt{7}$

답 $6\sqrt{7}$

0775 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{5^2+(3\sqrt{2})^2-1^2}{2\cdot5\cdot3\sqrt{2}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

답 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

0776 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{2^2+(2\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot2\cdot2\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$

답 30°

0777 $\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot8\cdot12\cdot\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot12\cdot\frac{1}{2}=24$

답 24

0778 $\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

0779 $\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot8\cdot9\cdot\sin 135^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot9\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=18\sqrt{2}$

답 $18\sqrt{2}$

0780 $\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot20=10\sqrt{3}$

답 $10\sqrt{3}$

0781 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\cdot r\cdot18=18 \quad \therefore r=2$

답 2

0782 $B=D=60^\circ$이므로

$\square ABCD=2\cdot3\cdot\sin 60^\circ$

$=2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

답 $3\sqrt{3}$

0783 $A+B=180^\circ$이므로 $A=45^\circ$

$\therefore \square ABCD=3\cdot4\cdot\sin 45^\circ$

$=3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

답 $6\sqrt{2}$

0784 $C=A=150^\circ$이므로

$\square ABCD=4\cdot5\cdot\sin 150^\circ$

$=4\cdot5\cdot\frac{1}{2}=10$

답 10

0785 $\square ABCD=\frac{1}{2}\cdot10\cdot14\cdot\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot10\cdot14\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=35\sqrt{3}$

답 $35\sqrt{3}$

유형 익히기 본문 98~104쪽

0786 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 60^\circ}=\frac{8}{\sin 45^\circ}$이므로

$a\sin 45^\circ=8\sin 60^\circ$, $\frac{\sqrt{2}}{2}a=4\sqrt{3}$

$\therefore a=4\sqrt{6}$

답 ②

0787 사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 120^\circ}=\frac{b}{\sin 30^\circ}$이므로

$b\sin 120^\circ=6\sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2}b=3$

$\therefore b=2\sqrt{3}$

답 ⑤

0788 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin B}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$이므로

$2\sqrt{3}\sin B=2\sin 120^\circ$

$\therefore \sin B=\frac{1}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

그런데 $B+C<180^\circ$이어야 하므로 $B=30^\circ$

$\therefore A=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)$

$=30^\circ$

답 ②

0789 $\angle ABC=90^\circ$, $\angle ABD=60^\circ$이므로

$\angle DBC=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

또 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle BAC=\angle BCA=45^\circ$

한편, 한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\angle BDC=\angle BAC=45^\circ$

따라서 $\triangle BCD$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}$이므로

$\overline{BC}\sin 30^\circ=\overline{CD}\sin 45^\circ$, $6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\overline{CD}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{CD}=6$

답 **6**

0790 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ}$이므로

$b\sin 60^\circ=\sqrt{6}\sin 45^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2}b=\sqrt{3}$

$\therefore b=2$

또 $\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=2R$에서

$R=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{2}$

답 $b=2$, $R=\sqrt{2}$

0791 $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$

$=\frac{a+b+c}{2R}$

$=\frac{a+b+c}{2\cdot 10}=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b+c=\frac{3}{2}\cdot 20=30$

답 ⑤

0792 선분 BD를 그으면 $\triangle ABD$에서 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{\overline{BD}}{2\cdot 3}=\frac{\overline{BD}}{6}$

또 $\triangle BCD$에서 사인법칙에 의하여

$\sin C=\frac{\overline{BD}}{2\cdot 6}=\frac{\overline{BD}}{12}$

$\therefore \frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\frac{\overline{BD}}{6}}{\frac{\overline{BD}}{12}}=2$

답 ②

0793 $A+B+C=\pi$이므로

$A+B=\pi-C$

따라서 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$이므로

$5\sin(A+B)\sin C=5\sin^2 C=4$

$\therefore \sin^2 C=\frac{4}{5}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$에서 $\sin C>0$이므로

$\sin C=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$c=2R\sin C=2\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=4$

답 **4**

0794 $A+B+C=180^\circ$이고, $A:B:C=1:2:3$이므로

$A=180^\circ\times\frac{1}{6}=30^\circ$

$B=180^\circ\times\frac{2}{6}=60^\circ$

$C=180^\circ\times\frac{3}{6}=90^\circ$

$\therefore a:b:c=\sin 30^\circ:\sin 60^\circ:\sin 90^\circ$

$=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1$

$=1:\sqrt{3}:2$

답 ③

0795 $\frac{a+b}{4}=\frac{b+c}{5}=\frac{c+a}{5}=k\ (k>0)$라 하면

$a+b=4k$, $b+c=5k$, $c+a=5k$

세 식을 연립하여 풀면

$a=2k$, $b=2k$, $c=3k$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2k:2k:3k$

$=2:2:3$

답 ②

0796 $a-2b+c=0$ …… ㉠

$3a+b-2c=0$ …… ㉡

㉠$+2\times$㉡을 하면

$7a-3c=0$ $\therefore a=\frac{3}{7}c$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{7}c-2b+c=0$ $\therefore b=\frac{5}{7}c$

$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

$= \frac{3}{7}c : \frac{5}{7}c : c$

$= 3 : 5 : 7$

답 ①

0797 $A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B) : \sin(B+C) : \sin(C+A)$

$= \sin(\pi-C) : \sin(\pi-A) : \sin(\pi-B)$

$= \sin C : \sin A : \sin B$

$= c : a : b$

$= 5 : 4 : 7$

즉 $a : b : c = 4 : 7 : 5$이므로

$a=4k$, $b=7k$, $c=5k$ $(k>0)$로 놓으면

$\frac{a^2+b^2+c^2}{ac} = \frac{(4k)^2+(7k)^2+(5k)^2}{4k \cdot 5k} = \frac{90k^2}{20k^2} = \frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

0798 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

이것을 주어진 식에 대입하면

$(b-c) \cdot \frac{a}{2R} = b \cdot \frac{b}{2R} - c \cdot \frac{c}{2R}$

$(b-c)a = b^2 - c^2$

$(b-c)a - (b-c)(b+c) = 0$

$(b-c)\{a-(b+c)\} = 0$

그런데 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$a-(b+c) \neq 0 \quad \therefore b=c$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 ③

0799 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$

이것을 주어진 식에 대입하면

$a \cdot \frac{a}{2R} = b \cdot \frac{b}{2R}$, $a^2 = b^2$

$\therefore a=b$ $(\because a>0, b>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ④

0800 $\cos^2 A = 1-\sin^2 A$, $\cos^2 B = 1-\sin^2 B$, $\cos^2 C = 1-\sin^2 C$이므로 주어진 식에 대입하면

$(1-\sin^2 A)-(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 C) = -1$

이 식을 정리하면

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ …… ㉠

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 ④

0801 코사인법칙에 의하여

$b^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$

$= 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 27$

$b>0$이므로 $b=3\sqrt{3}$

이때 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$

$\therefore R = \frac{3\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3$

따라서 $\triangle$ABC의 외접원의 넓이는

$\pi \cdot 3^2 = 9\pi$

답 ③

0802 코사인법칙에 의하여

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$(3\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2 + a^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot a \cdot \cos 60^\circ$

$a^2 - 2\sqrt{3}a - 6 = 0$

$\therefore a = 3+\sqrt{3}$ $(\because a>0)$

답 $3+\sqrt{3}$

0803 평행사변형 ABCD에서 $B=60^\circ$이므로 $A=120^\circ$

$\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$

$= 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$

$\overline{BD}>0$이므로 $\overline{BD}=7$

답 7

0804 사인법칙에 의하여

$\frac{7\sqrt{3}}{\sin A} = 2 \cdot 7$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

그런데 $90^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

따라서 코사인법칙에 의하여

$(7\sqrt{3})^2=b^2+(2b)^2-2\cdot b\cdot 2b\cos 120^\circ$

$147=b^2+4b^2+2b^2$

$7b^2=147,\ b^2=21$

$\therefore b=\sqrt{21}\ (\because b>0)$

답 ②

0805 $3a+2b-3c=0$ …… ㉠

$4a-4b+c=0$ …… ㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면

$10a-5c=0 \quad \therefore c=2a$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$4a-4b+2a=0 \quad \therefore b=\frac{3}{2}a$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2+(2a)^2-a^2}{2\cdot\frac{3}{2}a\cdot 2a}=\frac{7}{8}$$

답 $\frac{7}{8}$

0806 $(a+b):(b+c):(c+a)=5:7:6$이므로 양수 k에 대하여

$a+b=5k$ …… ㉠

$b+c=7k$ …… ㉡

$c+a=6k$ …… ㉢

라 하자. ㉠+㉡+㉢을 하면

$2(a+b+c)=18k$

$\therefore a+b+c=9k$ …… ㉣

㉣−㉡을 하면 $a=2k$

㉣−㉢을 하면 $b=3k$

㉣−㉠을 하면 $c=4k$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{(2k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\cdot 2k\cdot 4k}=\frac{11}{16}$$

답 ⑤

0807 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{4^2+5^2-7^2}{2\cdot 4\cdot 5}=-\frac{1}{5}$$ …… ㉮

$0^\circ<C<180^\circ$에서 $\sin C>0$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ …… ㉯

따라서 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{7}{\sin C}=2R$

$\therefore R=\frac{7}{2\sin C}=\frac{7}{\frac{4\sqrt{6}}{5}}=\frac{35\sqrt{6}}{24}$ …… ㉰

답 $\frac{35\sqrt{6}}{24}$

단계	채점요소	배점
㉮	$\cos C$의 값 구하기	30 %
㉯	$\sin C$의 값 구하기	30 %
㉰	외접원의 반지름의 길이 구하기	40 %

0808 $\overline{CF}=\overline{CH}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

$\overline{FH}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

따라서 $\triangle CFH$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(3\sqrt{5})^2+(3\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

답 ④

0809 가장 긴 변의 대각이 최대각이므로 최대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{1^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{-4}{4\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$이므로 $\theta=135^\circ$

따라서 $\triangle ABC$의 최대각의 크기는 135°이다.

답 135°

0810 $\sqrt{a^2+ab+b^2}>\sqrt{a^2}=a>b$이므로 $\sqrt{a^2+ab+b^2}$이 가장 긴 변의 길이이다.

이때 가장 긴 변의 대각이 최대각이므로 최대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-(\sqrt{a^2+ab+b^2})^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$이므로 $\theta=120^\circ$

따라서 $\triangle ABC$의 최대각의 크기는 120°이다.

답 120°

0811 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:5:7$

이므로 최소각은 A이다.

이때 $a=3k,\ b=5k,\ c=7k\ (k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\cos A=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(3k)^2}{2\cdot 5k\cdot 7k}=\frac{13}{14}$$

답 ②

0812 $\frac{2a-b}{2}=\frac{2b-c}{3}=\frac{4c-5a}{5}=k\ (k>0)$라 하면

$2a-b=2k$, $2b-c=3k$, $4c-5a=5k$

세 식을 연립하여 풀면

$a=3k$, $b=4k$, $c=5k$ ····· ㉮

이때 가장 짧은 변의 길이가 a이므로 A가 최소각이다. ····· ㉯

따라서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\cos A=\frac{(4k)^2+(5k)^2-(3k)^2}{2\cdot4k\cdot5k}=\frac{4}{5}$ ····· ㉰

답 $\frac{4}{5}$

단계	채점요소	배점
㉮	a, b, c를 k를 사용하여 나타내기	40 %
㉯	A가 최소각임을 알기	20 %
㉰	$\cos\theta$의 값 구하기	40 %

0813 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:5:7$

$a=3k$, $b=5k$, $c=7k\ (k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot3k\cdot5k}=-\frac{1}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$

답 ④

0814 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로

$\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}\right):\left(\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right):\left(\frac{c}{2R}+\frac{a}{2R}\right)=7:9:10$

즉 $(a+b):(b+c):(c+a)=7:9:10$

$a+b=7k$, $b+c=9k$, $c+a=10k\ (k>0)$라 하고 세 식을 연립하여 풀면

$a=4k$, $b=3k$, $c=6k$

따라서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(3k)^2+(6k)^2-(4k)^2}{2\cdot3k\cdot6k}=\frac{29}{36}$

답 ⑤

0815 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로

$\frac{6a}{2R}=\frac{2\sqrt{3}b}{2R}=\frac{3c}{2R}$ $\therefore 6a=2\sqrt{3}b=3c$

각 변을 6으로 나누어 $a=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{c}{2}=k\ (k>0)$라 하면

$a=k$, $b=\sqrt{3}k$, $c=2k$

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(\sqrt{3}k)^2+(2k)^2-k^2}{2\cdot\sqrt{3}k\cdot2k}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=30^\circ$

답 ⑤

0816 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이것을 주어진 식에 대입하면

$a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$a^2+b^2-c^2=b^2+c^2-a^2$

$a^2=c^2$

$\therefore a=c\ (\because a>0, c>0)$

따라서 △ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

답 ③

0817 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이것을 주어진 식에 대입하면

$a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$

$(c^2+a^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)=2c^2$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 △ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

답 ④

0818 $\tan A\sin A=\tan B\sin B$에서

$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\sin A=\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\sin B$

$\therefore \cos B\sin^2A=\cos A\sin^2B$ ····· ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$이고,

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a^2}{4R^2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{b^2}{4R^2}$

$a(c^2+a^2-b^2)=b(b^2+c^2-a^2)$

$a^3+ac^2-ab^2=b^3+bc^2-a^2b$

$a^3-b^3+(a-b)c^2+(a-b)ab=0$

$(a-b)(a^2+2ab+b^2+c^2)=0$

$\therefore a=b\ (\because a>0, b>0, c>0)$

따라서 $\triangle ABC$는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ②

0819 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$이므로 $\overline{AD}=x$라 하면

$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot x\cdot\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sin 30^\circ$

$9\sqrt{3}=\sqrt{3}x+\frac{3\sqrt{3}}{4}x,\ \frac{7\sqrt{3}}{4}x=9\sqrt{3}$

$\therefore x=\frac{36}{7}$

따라서 $\overline{AD}$의 길이는 $\frac{36}{7}$이다.

답 ④

0820 $\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot c\cdot\sin 135^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2$

$\therefore c=\sqrt{2}$

따라서 코사인법칙에 의하여

$a^2=4^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ$

$=16+2-2\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=26$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{26}$

답 $\sqrt{26}$

0821 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=3:4:5$이므로

$\angle AOB=360^\circ\cdot\frac{3}{3+4+5}=90^\circ$

$\angle BOC=360^\circ\cdot\frac{4}{3+4+5}=120^\circ$

$\angle COA=360^\circ\cdot\frac{5}{3+4+5}=150^\circ$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로

$\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 90^\circ+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 120^\circ$

$+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 150^\circ$

$=2(\sin 90^\circ+\sin 120^\circ+\sin 150^\circ)$

$=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$

$=3+\sqrt{3}$

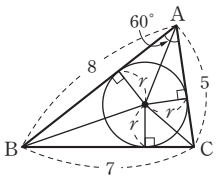
답 ⑤

0822 $\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=10\sqrt{3}$



따라서 $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$에서

$10\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(7+5+8)$

$10\sqrt{3}=10r$

$\therefore r=\sqrt{3}$

답 ③

0823 헤론의 공식에서 $s=\frac{9+10+11}{2}=15$이므로 $\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\sqrt{15(15-9)(15-10)(15-11)}$

$=30\sqrt{2}$ ㉮

$S=\frac{abc}{4R}$에서 $30\sqrt{2}=\frac{9\cdot 10\cdot 11}{4R}$

$\therefore R=\frac{33\sqrt{2}}{8}$ ㉯

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$에서 $30\sqrt{2}=\frac{1}{2}r(9+10+11)$

$30\sqrt{2}=15r$

$\therefore r=2\sqrt{2}$ ㉰

$\therefore R-r=\frac{33\sqrt{2}}{8}-2\sqrt{2}=\frac{17\sqrt{2}}{8}$ ㉱

답 $\frac{17\sqrt{2}}{8}$

단계	채점요소	배점
㉮	헤론의 공식을 이용하여 $\triangle ABC$의 넓이 구하기	30 %
㉯	R의 값 구하기	30 %
㉰	r의 값 구하기	30 %
㉱	$R-r$의 값 구하기	10 %

0824 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2:3:3$이므로 $a=2k$, $b=3k$, $c=3k$ $(k>0)$라 하고 $\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

헤론의 공식에서 $s=\frac{2k+3k+3k}{2}=4k$이므로

$S=\sqrt{4k(4k-2k)(4k-3k)(4k-3k)}$

$=2\sqrt{2}k^2$

$=8\sqrt{2}$

$k^2=4$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

따라서 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는

$a+b+c=8k=16$

답 16

0825 헤론의 공식에서 $s=\frac{8+12+10}{2}=15$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\sqrt{15(15-8)(15-12)(15-10)}=15\sqrt{7}$

이때 $S=\frac{1}{2}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{CB}\cdot\sin C$이므로

$15\sqrt{7}=\frac{1}{2}\cdot10\cdot12\cdot\sin C \quad \therefore \sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$

한편, 점 D는 변 BC를 1 : 3으로 내분하므로

$\overline{CD}=9$

또 $0<C<90^\circ$에서 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$

따라서 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\frac{3}{4}=\frac{10^2+9^2-\overline{AD}^2}{2\cdot10\cdot9}$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{46}$

답 $\sqrt{46}$

0826 △ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot8\cdot\sin30^\circ=\frac{1}{2}\cdot4\cdot8\cdot\frac{1}{2}=8$

△BCD의 넓이는 헤론의 공식을 이용하면

$s=\frac{8+8+2}{2}=9$이므로

$\sqrt{9(9-8)(9-8)(9-2)}=3\sqrt{7}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이 S는

$S=\triangle ABD+\triangle BCD=8+3\sqrt{7}$

답 $8+3\sqrt{7}$

0827 $\overline{BD}$를 그으면 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cdot\cos120^\circ$

$=25+9-2\cdot5\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49$

$\therefore \overline{BD}=7$

△ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

△BCD의 넓이는 헤론의 공식을 이용하면

$s=\frac{8+3+7}{2}=9$이므로

$\sqrt{9(9-8)(9-3)(9-7)}=6\sqrt{3}$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}+6\sqrt{3}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$

답 ④

0828 $\overline{BD}$를 그으면 △BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=4^2+8^2-2\cdot4\cdot8\cdot\cos60^\circ$

$=16+64-2\cdot4\cdot8\cdot\frac{1}{2}=48$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

$\angle CBD=\theta$라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{4}{\sin\theta}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin60^\circ}$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=30^\circ$ 또는 $\theta=150^\circ$

그런데 $\theta<B=75^\circ$이므로 $\theta=30^\circ$

$\therefore \angle ABD=75^\circ-30^\circ=45^\circ$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\sqrt{3}\cdot\sin45^\circ+\frac{1}{2}\cdot4\cdot8\cdot\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=3\sqrt{6}+8\sqrt{3}$

답 $3\sqrt{6}+8\sqrt{3}$

0829 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot7\cdot8}=-\frac{1}{2}$

$90^\circ<B<180^\circ$이므로

$B=120^\circ$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이 S는

$S=7\cdot8\cdot\sin120^\circ=7\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=28\sqrt{3}$

답 ⑤

0830 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AD}=\overline{BC}=4$이고 넓이가 $4\sqrt{2}$이므로

$2\cdot4\cdot\sin A=4\sqrt{2} \quad \therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$90^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=135^\circ$

답 ④

0831 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{3})^2=3^2+\overline{BC}^2-2\cdot3\cdot\overline{BC}\cdot\cos60^\circ$

$27=9+\overline{BC}^2-3\overline{BC}$

$\overline{BC}^2-3\overline{BC}-18=0$

$(\overline{BC}-6)(\overline{BC}+3)=0$

$\therefore \overline{BC}=6$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이 S는

$S=3\cdot6\cdot\sin60^\circ=3\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

답 $9\sqrt{3}$

0832 사각형 ABCD의 넓이가 $3\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot\overline{AC}\cdot\sin120^\circ=3\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot\overline{AC}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AC}=3$

답 3

0833 두 대각선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 사각형 ABCD의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\cdot \sin\theta = 8$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = 30^\circ$ 또는 $\theta = 150^\circ$

그런데 θ는 예각이므로 $\theta = 30^\circ$

답 ②

0834 사각형 ABCD의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin 30^\circ = 2$

$\frac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{2} = 2 \quad \therefore ab = 8$

$\therefore a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 6^2 - 2\cdot 8 = 20$

답 **20**

0835 두 대각선의 길이를 p, q라 하면

$p+q=8$에서 $q = 8-p > 0$

$\therefore 0 < p < 8$

사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S = \frac{1}{2}pq\sin 60^\circ$

$= \frac{1}{2}p(8-p)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(-p^2+8p)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{4}(p-4)^2 + 4\sqrt{3}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $4\sqrt{3}$이다.

답 ②

유형 up

본문 105쪽

0836 △ABC에서 $A+B+C = 180^\circ$이므로

$C = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{50}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}$이므로

$\overline{BC} = \sin 60^\circ\cdot\frac{50}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{50}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 25\sqrt{6}\,(\text{m})$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $25\sqrt{6}$ m이다.

답 ③

0837 $C = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{5}{\sin 60^\circ} = 2R$

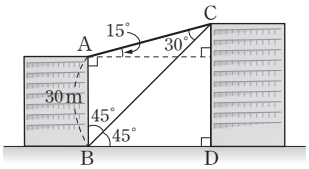
$\therefore R = \frac{5}{2\sin 60^\circ} = \frac{5}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 물통의 부피는

$\pi\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot 9 = 75\pi$

답 **75π**

0838 오른쪽 그림과 같이 두 건물 위의 끝의 두 지점을 각각 A, C라 하고, 지면 위의 두 지점을 B, D라 하자.



△ABC에서

$\angle BAC = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$이므로

$\angle ACB = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin 105^\circ} = \frac{30}{\sin 30^\circ}$이고

$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이므로

$\overline{BC} = \frac{30}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 105^\circ = \frac{30}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$= 15(\sqrt{6}+\sqrt{2})\,(\text{m})$

△CBD에서

$\overline{CD} = \overline{BC}\sin 45^\circ = 15(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 15(\sqrt{3}+1)\,(\text{m})$

따라서 옆 건물의 높이는 $15(\sqrt{3}+1)$ m이다.

답 **15(√3+1) m**

0839 △ACB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2 = 50^2 + 60^2 - 2\cdot 50\cdot 60\cdot\cos 60^\circ$

$= 2500 + 3600 - 2\cdot 50\cdot 60\cdot\frac{1}{2}$

$= 3100$

$\therefore \overline{AB} = 10\sqrt{31}\,(\text{m})$

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{31}$ m이다.

답 ②

0840 $\overline{CD} = x$ m라 하면 △ACD에서

$\tan 30^\circ = \frac{x}{\overline{AC}} \quad \therefore \overline{AC} = \sqrt{3}x\,(\text{m})$

또 △BCD는 $\angle BCD = 90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BC} = \overline{CD} = x\,(\text{m})$

따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$10^2 = (\sqrt{3}x)^2 + x^2 - 2\cdot\sqrt{3}x\cdot x\cdot\cos 30^\circ$

$100 = 3x^2 + x^2 - 2\cdot\sqrt{3}x\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

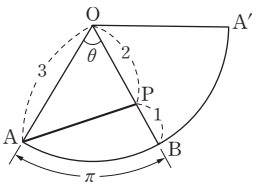
$x^2 = 100$

$\therefore x = 10\ (\because x > 0)$

따라서 가로등의 높이는 10 m이다.

답 ⑤

0841 오른쪽 그림의 원뿔의 옆면의 전개도에서 구하는 최단 거리는 선분 AP의 길이이다.
이때 원뿔의 밑면의 둘레의 길이가 2π이므로



$\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AA'}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi$

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ라 하면

$3\cdot\theta=\pi$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$

따라서 $\triangle OAP$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AP}^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$=9+4-2\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=7$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{7}$

답 $\sqrt{7}$

시험에 꼭 나오는 문제 본문 106~109쪽

0842 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

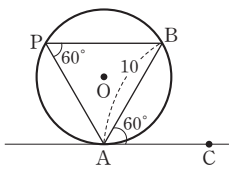
사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$이므로

$a=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2$

$\therefore \frac{a}{\cos A}=\frac{2}{\cos 45^\circ}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$

답 ②

0843 현 AB와 접선 AC가 이루는 각의 크기가 60°이므로 오른쪽 그림과 같이 호 AB에 대한 원주각, 즉 $\angle APB$의 크기도 60°이다.
이때 원 O의 반지름의 길이를 R라 하면 $\triangle ABP$에서 사인법칙에 의하여



$\frac{10}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{10}{2\sin 60^\circ}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$

따라서 원 O의 넓이는

$\pi\cdot\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{100}{3}\pi$

답 ⑤

0844 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

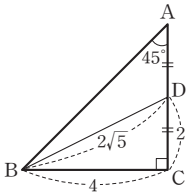
$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

$\therefore \sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$

$=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{4}{2\cdot 1}=2$

답 ④

0845 $\overline{CD}=2$이므로 직각삼각형 BCD에서 $\overline{BD}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$
$\triangle ABD$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $A=45^\circ$이므로



$2R=\frac{2\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}=2\sqrt{10}$

$\therefore R=\sqrt{10}$

답 $\sqrt{10}$

0846 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

이므로 이것을 주어진 식에 대입하면

$\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2R}=\frac{b}{2R}$

$\therefore b=\sqrt{3}a$ …… ㉠

이때 $C=90^\circ$이므로 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+(\sqrt{3}a)^2=10^2$, $4a^2=100$, $a^2=25$

$\therefore a=5$, $b=5\sqrt{3}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\sqrt{3}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$

답 ④

0847 $2a-b=9k$, $2b-c=6k$, $2c-a=k$ $(k>0)$라 하고 세 식을 연립하여 풀면

$a=7k$, $b=5k$, $c=4k$

$\therefore a:b:c=7:5:4$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=7:5:4$

답 ⑤

0848 $3a-2b+c=0$, $a+2b-3c=0$을 연립하여 풀면

$c=2a$, $b=\frac{5}{2}a$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=a:\frac{5}{2}a:2a=2:5:4$

$\sin A=2k$, $\sin B=5k$, $\sin C=4k$ $(k>0)$라 하면

$$\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin C}{\sin B}+\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{5k}{2k}+\frac{4k}{5k}+\frac{2k}{4k}$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{19}{5}$$

답 $\frac{19}{5}$

0849 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{5})^2=a^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot a\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ$

$20=a^2+8-2\cdot a\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a^2-4a-12=0$

$(a-6)(a+2)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

답 ①

0850 코사인법칙에 의하여

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ …… ㉠

$c^2-3ab=(a-b)^2$에서

$c^2-3ab=a^2-2ab+b^2$

$c^2=a^2+b^2+ab$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\cos C=-\frac{1}{2}$

$\therefore C=120^\circ\ (\because 0^\circ<C<180^\circ)$

답 ④

0851 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{4}{x}\cdot\cos 120^\circ$

$=x^2+\frac{16}{x^2}-2\cdot x\cdot\frac{4}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=x^2+\frac{16}{x^2}+4$

이때 $x^2>0$, $\frac{16}{x^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+\frac{16}{x^2}\ge 2\sqrt{x^2\cdot\frac{16}{x^2}}=2\sqrt{16}=8$

$\left(\text{단, 등호는 } x^2=\frac{16}{x^2},\ \text{즉 } x=2\text{일 때 성립한다.}\right)$

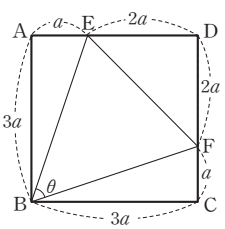
즉 $\overline{BC}^2\ge 8+4=12$이므로

$\overline{BC}\ge\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{BC}$의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.

답 ⑤

0852 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $3a$ $(a>0)$라 하면



직각삼각형 ABE에서

$\overline{BE}=\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a$

이때 $\overline{BE}=\overline{BF}$이므로 $\overline{BF}=\sqrt{10}a$

직각삼각형 DEF에서

$\overline{EF}=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$

따라서 △BEF에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{10}a)^2+(\sqrt{10}a)^2-(2\sqrt{2}a)^2}{2\cdot\sqrt{10}a\cdot\sqrt{10}a}$

$=\frac{12a^2}{20a^2}=\frac{3}{5}$

답 ②

0853 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle DAC=\angle BCA$

$\overline{AC}=x$, $\angle DAC=\angle BCA=\theta$라 하면

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{10^2+x^2-6^2}{2\cdot 10\cdot x}=\frac{x^2+64}{20x}$ …… ㉠

또 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{x^2+4^2-8^2}{2\cdot x\cdot 4}=\frac{x^2-48}{8x}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{x^2+64}{20x}=\frac{x^2-48}{8x}$, $3x^2=368$, $x^2=\frac{368}{3}$

$\therefore x=\frac{4\sqrt{69}}{3}$

답 ⑤

0854 $5-x$가 가장 짧은 변의 길이므로

$\cos 30^\circ=\frac{(5+x)^2+5^2-(5-x)^2}{2(5+x)\cdot 5}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25+10x+x^2+25-(25-10x+x^2)}{10(5+x)}$

$5\sqrt{3}+\sqrt{3}x=4x+5$

$(4-\sqrt{3})x=5\sqrt{3}-5$

$\therefore x=\frac{5\sqrt{3}-5}{4-\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}-5}{13}$

답 $\frac{15\sqrt{3}-5}{13}$

0855 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$

$a=7k$, $b=5k$, $c=3k$ $(k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(5k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2\cdot 5k\cdot 3k}=-\frac{1}{2}$

$0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{3}{\sin 120^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{3}{2\sin 120^\circ}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

따라서 △ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\cdot(\sqrt{3})^2=3\pi$

답 ③

0856 $\triangle ABC$에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이므로 주어진 식에 대입하면

$4\cdot\frac{a}{2R}=a^2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\therefore a^2+b^2-c^2=8$

답 8

0857 외접원 O의 반지름의 길이를 R라 하면

$6+8+10=2\pi R$

$\therefore R=\frac{12}{\pi}$

중심각의 크기는 호의 길이에 비례하므로

$\angle AOB=360^\circ\times\frac{6}{24}=90^\circ$

$\angle BOC=360^\circ\times\frac{8}{24}=120^\circ$

$\angle COA=360^\circ\times\frac{10}{24}=150^\circ$

$\therefore \triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{12}{\pi}\right)^2\cdot\sin 90^\circ+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{12}{\pi}\right)^2\cdot\sin 120^\circ$

$+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{12}{\pi}\right)^2\cdot\sin 150^\circ$

$=\frac{72}{\pi^2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{36}{\pi^2}(3+\sqrt{3})$

따라서 $a=36$, $b=3$이므로

$a+b=36+3=39$

답 39

0858 $\overline{AD}=x$라 하면

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$이므로

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot3\cdot\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot6\cdot x\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot3\cdot x\cdot\sin 60^\circ$

$\frac{18\sqrt{3}}{4}=\frac{6\sqrt{3}}{4}x+\frac{3\sqrt{3}}{4}x$

$\frac{9\sqrt{3}}{4}x=\frac{18\sqrt{3}}{4}$

$\therefore x=2$

따라서 $\overline{AD}$의 길이는 2이다.

답 2

0859 $a+c=10$에서 $c=10-a>0$

$\therefore 0<a<10$

$\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot(10-a)\cdot\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot a\cdot(10-a)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(-a^2+10a)$

$=-\frac{1}{4}(a-5)^2+\frac{25}{4}$

따라서 $\triangle ABC$의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$이다.

답 $\frac{25}{4}$

0860 평행사변형 ABCD의 넓이가 $10\sqrt{3}$이므로

$4\cdot5\cdot\sin B=10\sqrt{3}$ $\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$90^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=120^\circ$

따라서 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cdot\cos 120^\circ$

$=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=61$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{61}$

답 ①

0861 사각형 ABCD에서 $\overline{AC}=p$, $\overline{BD}=q$, $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

사각형 ABCD의 넓이가 100이므로

$\frac{1}{2}pq\sin\theta=100$

새로운 사각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot0.8p\cdot1.1q\cdot\sin\theta$

$=0.8\cdot1.1\cdot\frac{1}{2}pq\sin\theta$

$=0.8\cdot1.1\cdot100=88$

답 88

0862 대각선의 길이를 a라 하면 등변사다리꼴의 넓이가 16이므로

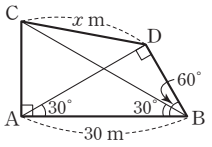
$\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 30^\circ=16$, $\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}=16$

$a^2=64$ $\therefore a=8$ ($\because a>0$)

따라서 구하는 대각선의 길이는 8이다.

답 ③

0863 직각삼각형 ABC에서



$\cos 30^\circ=\frac{30}{\overline{BC}}$

$\therefore \overline{BC}=20\sqrt{3}$ (m)

$\angle ADB=90^\circ$이므로 직각삼각형 ABD에서

$\cos 60^\circ=\frac{\overline{BD}}{30}$

$\therefore \overline{BD}=15$ (m)

$\triangle BCD$에서 $\overline{CD}=x$ m라 하면 코사인법칙에 의하여

$x^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\cos 30^\circ$
$=(20\sqrt{3})^2+15^2-2\cdot 20\sqrt{3}\cdot 15\cdot\cos 30^\circ$
$=525$
$\therefore x=5\sqrt{21}\ (\because x>0)$
따라서 두 지점 C, D 사이의 거리는 $5\sqrt{21}$ m이다.

답 $5\sqrt{21}$ m

0864 x에 대한 이차방정식
$(\cos A+\cos B)x^2+2x\sin C+(\cos A-\cos B)=0$
이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\sin^2 C-(\cos A+\cos B)(\cos A-\cos B)$
$=\sin^2 C-(\cos^2 A-\cos^2 B)=0$
$\sin^2 C-(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)=0$
$\sin^2 C+\sin^2 A=\sin^2 B$ ……㉮

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
$\left(\frac{c}{2R}\right)^2+\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2$
$\therefore b^2=a^2+c^2$
따라서 $\triangle ABC$는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다. ……㉯

답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

단계	채점요소	배점
㉮	중근을 가질 조건 구하기	70%
㉯	삼각형의 모양 구하기	30%

0865 코사인법칙에 의하여
$\cos C=\frac{6^2+b^2-3^2}{2\cdot 6\cdot b}=\frac{b^2+27}{12b}=\frac{b}{12}+\frac{9}{4b}$ ……㉮

이때 $\frac{b}{12}>0$, $\frac{9}{4b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{b}{12}+\frac{9}{4b}\ge 2\sqrt{\frac{b}{12}\cdot\frac{9}{4b}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{12}=\frac{9}{4b}\text{일 때 성립한다.}\right)$ ……㉯

따라서 $\cos C$의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $\frac{b}{12}=\frac{9}{4b}$이므로
$b^2=27$ $\therefore b=3\sqrt{3}\ (\because b>0)$ ……㉰

답 $3\sqrt{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	$\cos C$를 b에 대한 식으로 나타내기	30%
㉯	$\cos C$의 최솟값 구하기	40%
㉰	b의 값 구하기	30%

0866 $a+b=7k$, $b+c=5k$, $c+a=6k$ $(k>0)$라 하고 세 식을 연립하여 풀면
$a=4k$, $b=3k$, $c=2k$ ……㉮

헤론의 공식에서
$s=\frac{4k+3k+2k}{2}=\frac{9}{2}k$이므로
$\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면
$S=\sqrt{\frac{9}{2}k\left(\frac{9}{2}k-4k\right)\left(\frac{9}{2}k-3k\right)\left(\frac{9}{2}k-2k\right)}$
$=\sqrt{\frac{9}{2}k\cdot\frac{1}{2}k\cdot\frac{3}{2}k\cdot\frac{5}{2}k}$
$=\frac{3\sqrt{15}}{4}k^2$ ……㉯

따라서 $\frac{3\sqrt{15}}{4}k^2=3\sqrt{15}$이므로
$k^2=4$ $\therefore k=2\ (\because k>0)$ ……㉰

$\therefore a=4k=4\cdot 2=8$ ……㉱

답 8

단계	채점요소	배점
㉮	a, b, c를 k를 사용하여 나타내기	30%
㉯	헤론의 공식을 이용하여 $\triangle ABC$의 넓이 구하기	40%
㉰	k의 값 구하기	20%
㉱	a의 값 구하기	10%

0867 $\angle CPD=\theta$라 하면 $\triangle CDP$에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\theta=\frac{2^2+4^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 4}=\frac{1}{4}$ ……㉮

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이고, $0^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로
$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ ……㉯

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=7\sqrt{15}$ ……㉰

답 $7\sqrt{15}$

단계	채점요소	배점
㉮	$\cos\theta$의 값 구하기	40%
㉯	$\sin\theta$의 값 구하기	20%
㉰	$\square ABCD$의 넓이 구하기	40%

0868 $\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$이므로
$\frac{a}{R}=2\sin A$

이때 $\frac{a}{R}$, 즉 $2\sin A$가 정수이어야 하므로

$2\sin A=k$ (k는 정수)라 하면 $\sin A=\frac{k}{2}$

그런데 $0^\circ<A<180^\circ$에서 $0<\sin A\le 1$이므로

$0<\frac{k}{2}\le 1$ $\therefore 0<k\le 2$

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$

$k=1$일 때, $\sin A=\frac{1}{2}$ $\therefore A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

$k=2$일 때, $\sin A=1$ $\therefore A=90^\circ$

따라서 A의 값은

$A=30^\circ$ 또는 $A=90^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

답 **30°, 90°, 150°**

0869 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고 $A=120^\circ$이므로

$C=\frac{1}{2}(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

이때 $\overline{CP}=x$ ($x>0$)라 하면 $\triangle BCP$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BP}^2=x^2+8^2-2\cdot x\cdot 8\cdot\cos 30^\circ$

$=x^2+64-2\cdot x\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=x^2-8\sqrt{3}x+64$

$\therefore \overline{BP}^2+\overline{CP}^2=(x^2-8\sqrt{3}x+64)+x^2$

$=2x^2-8\sqrt{3}x+64$

$=2(x-2\sqrt{3})^2+40$

따라서 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 40이다.

답 ⑤

0870 $\overline{AC}$를 그으면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-2\cdot 2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\cos 135^\circ$

$=4+8-4\sqrt{3}-2\cdot 2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=8$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{2}$

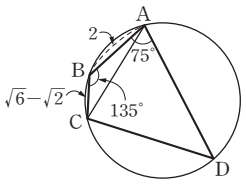
또 $\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=\frac{2}{\sin(\angle BCA)}$

$2\sqrt{2}\sin(\angle BCA)=2\sin 135^\circ$

$\sin(\angle BCA)=\frac{1}{2}$

$\therefore \angle BCA=30^\circ$ 또는 $\angle BCA=150^\circ$



그런데 $\angle B+\angle BCA<180^\circ$이어야 하므로

$\angle BCA=30^\circ$

따라서 $\angle BAC=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=15^\circ$이므로

$\angle CAD=75^\circ-15^\circ=60^\circ$

한편, 사각형 ABCD는 원에 내접하므로 대각의 크기의 합이 180°이다.

$\therefore D=180^\circ-B=180^\circ-135^\circ=45^\circ$

따라서 $\triangle ACD$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$, $\overline{CD}\sin 45^\circ=2\sqrt{2}\sin 60^\circ$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{CD}=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{CD}=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

0871 ㄱ. $a=5$이면 $\triangle ABC$는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이므로 $\overline{BC}$는 원의 지름이다.

$\therefore R=\frac{5}{2}$ (참)

ㄴ. 사인법칙에 의하여 $a=2R\sin A$이므로

$a=2\cdot 4\cdot\sin A=8\sin A$ (참)

ㄷ. 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{3^2+4^2-a^2}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{25-a^2}{24}$

$1<a\le\sqrt{13}$에서 $1<a^2\le 13$이므로

$\frac{1}{2}\le\frac{25-a^2}{24}<1$

$\therefore \frac{1}{2}\le\cos A<1$ $\therefore 0^\circ<A\le 60^\circ$

따라서 A의 최댓값은 60°이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

08 등차수열과 등비수열

교과서 문제 정복하기

본문 113쪽

0872 3−1=2에서 공차가 2이므로 주어진 수열은
1, 3, [5], [7], 9, ⋯

답 **5, 7**

0873 5−10=−5에서 공차가 −5이므로 주어진 수열은
20, [15], 10, 5, [0], ⋯

답 **15, 0**

0874 첫째항이 3, 공차가 3이므로
$a_n=3+(n-1)\cdot 3=3n$

답 $a_n=3n$

0875 첫째항이 −1, 공차가 4이므로
$a_n=-1+(n-1)\cdot 4=4n-5$

답 $a_n=4n-5$

0876 $a_n=4+(n-1)\cdot 3=3n+1$
$\therefore a_{10}=3\cdot 10+1=31$

답 **31**

0877 $a_n=-2+(n-1)\cdot 5=5n-7$
$\therefore a_{10}=5\cdot 10-7=43$

답 **43**

0878 공차를 d라 하면 $a_1=5$, $a_8=40$에서
$5+(8-1)d=40$, $7d=35$ $\therefore d=5$

답 **5**

0879 공차를 d라 하면 $a_1=-5$, $a_6=-40$에서
$-5+(6-1)d=-40$, $5d=-35$ $\therefore d=-7$

답 **−7**

0880 x를 1과 19의 등차중항이라 하면
$x=\frac{1+19}{2}=10$

답 **10**

0881 공차는 −3이므로 3을 제 n 항이라 하면
$a_n=33-3(n-1)=3$ $\therefore n=11$
$\therefore S_{11}=\frac{11(33+3)}{2}=198$

답 **198**

0882 공차는 3이므로 41을 제 n 항이라 하면
$a_n=2+3(n-1)=41$ $\therefore n=14$
$\therefore S_{14}=\frac{14(2+41)}{2}=301$

답 **301**

0883 $\frac{30\{2\cdot 2+(30-1)\cdot 2\}}{2}=930$

답 **930**

0884 $\frac{30\{2\cdot 4+(30-1)\cdot(-2)\}}{2}=-750$

답 **−750**

0885 $\frac{6}{3}=2$에서 공비가 2이므로 주어진 수열은
3, 6, [12], [24], 48, ⋯

답 **12, 24**

0886 $\frac{-2}{2}=-1$에서 공비가 −1이므로 주어진 수열은
2, −2, [2], [−2], 2, ⋯

답 **2, −2**

0887 첫째항이 0.1, 공비가 0.1이므로
$a_n=0.1\cdot(0.1)^{n-1}=0.1^n$

답 $a_n=0.1^n$

0888 첫째항이 2, 공비가 $\sqrt{2}$이므로
$a_n=2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$

답 $a_n=2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$

0889 첫째항이 1, 공비가 3이므로
$a_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$ $\therefore a_{10}=3^9$

답 3^9

0890 첫째항이 2, 공비가 −3이므로
$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$ $\therefore a_{10}=2\cdot(-3)^9$

답 $2\cdot(-3)^9$

0891 공비를 r라 하면 $a_1=\frac{2}{27}$, $a_4=2$에서
$\frac{2}{27}\cdot r^3=2$, $r^3=27$ $\therefore r=3$

답 **3**

0892 공비를 r라 하면 $a_1=1$, $a_5=\frac{1}{81}$에서
$1\cdot r^4=\frac{1}{81}$ $\therefore r=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

0893 $S_5=\dfrac{2\cdot(4^5-1)}{4-1}=\dfrac{2}{3}(4^5-1)=682$

답 **682**

0894 공비는 $\dfrac{1}{2}$이므로 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^9$을 제 n 항이라 하면

$a_n=1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^9$ $\therefore n=10$

$\therefore S_{10}=\dfrac{1\cdot\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}$

답 $\mathbf{2\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}}$

0895 첫째항이 2, 공비가 4이므로

$\dfrac{2\cdot(4^n-1)}{4-1}=\dfrac{2}{3}(4^n-1)$

답 $\mathbf{\dfrac{2}{3}(4^n-1)}$

0896 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{1\cdot\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

답 $\mathbf{\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$

유형 익히기

본문 114~125쪽

0897 첫째항이 20, 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_n=20+(n-1)\cdot(-3)=-3n+23$

$-3n+23=-118$에서 $n=47$

따라서 주어진 등차수열에서 -118은 제 47 항이다.

답 **제 47 항**

0898 등차수열의 일반항 $a_n=An+B$ (A, B는 상수)의 첫째항은 $A+B$이고 공차는 A이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

(1) $a=-4+14=10$, $d=-4$

$\therefore ad=10\cdot(-4)=-40$

(2) $a=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=1$, $d=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore ad=1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\mathbf{-40}$ (2) $\mathbf{-\dfrac{1}{2}}$

0899 공차를 d라 하면

$d=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$이므로

$a=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore b-a=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$

답 ③

0900 $\{a_n\}$이 등차수열이면 a_n은 n에 대한 일차 이하의 다항식이다.

ㄱ. 수열 $\{3\}$은 공차가 0인 등차수열이다.

ㄴ. $2n+1$은 n에 대한 일차식이므로 수열 $\{2n+1\}$은 등차수열이다.

ㄷ. $2n^2-1$은 n에 대한 이차식이므로 수열 $\{2n^2-1\}$은 등차수열이 아니다.

ㄹ. $\sqrt{n-1}$은 n에 대한 일차식이 아니므로 수열 $\{\sqrt{n-1}\}$은 등차수열이 아니다.

ㅁ. 2^{n+1}은 n에 대한 일차식이 아니므로 수열 $\{2^{n+1}\}$은 등차수열이 아니다.

ㅂ. $3-2n$은 n에 대한 일차식이므로 수열 $\{3-2n\}$은 등차수열이다.

따라서 등차수열인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅂ의 3개이다.

답 **3**

0901 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_8=26$에서 $a+7d=26$ …… ㉠

$a_6:a_{10}=5:8$에서 $8a_6=5a_{10}$

$8(a+5d)=5(a+9d)$

$\therefore 3a-5d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $d=3$

따라서 $a_n=5+(n-1)\cdot3=3n+2$이므로

$a_{30}=3\cdot30+2=92$

답 ③

0902 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=10$에서 $a+d=10$ …… ㉠

$a_5=43$에서 $a+4d=43$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=11$

$\therefore a_n=-1+(n-1)\cdot11=11n-12$

$11n-12=758$ $\therefore n=70$

답 ④

0903 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_6=(a+d)+(a+5d)=20$

$\therefore a+3d=10$ …… ㉠

$a_4+a_5=(a+3d)+(a+4d)=24$

$\therefore\ 2a+7d=24$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $d=4$

$\therefore\ a_{10}=a+9d=-2+9\cdot4=34$

답 **34**

0904 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=-6+(n-1)d$

…… ㉮

이때 제 2 항과 제 6 항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$a_2+a_6=0$

$(-6+d)+(-6+5d)=0$

$6d=12$ $\therefore\ d=2$

…… ㉯

$\therefore\ a_n=-6+(n-1)\cdot2=2n-8$

…… ㉰

$\therefore\ a_{10}=2\cdot10-8=12$

…… ㉱

답 **12**

단계	채점요소	배점
㉮	a_n을 식으로 나타내기	20 %
㉯	공차 구하기	40 %
㉰	a_n 구하기	20 %
㉱	a_{10} 구하기	20 %

0905 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

제 3 항이 63이므로 $a_3=a+2d=63$ …… ㉠

제 10 항이 35이므로 $a_{10}=a+9d=35$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d=-4$, $a=71$

$\therefore\ a_n=71+(n-1)\cdot(-4)=-4n+75$

$-4n+75<0$에서 $n>18.75$

이때 n은 자연수이므로 처음으로 음수가 나오는 항은 제 19 항이다.

답 ②

0906 $a_n=-62+(n-1)\cdot5=5n-67$

$5n-67>0$에서 $n>13.4$

이때 n은 자연수이므로 처음으로 양수가 나오는 항은 제 14 항이다.

답 ③

0907 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$

제 10 항과 제 16 항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$a_{10}+a_{16}=0$

$(a+9d)+(a+15d)=2a+24d=0$

$\therefore\ a=-12d$

이때 $a>0$이므로 $d<0$

$a_n=a+(n-1)d=-12d+(n-1)d$

$=(n-13)d$

$(n-13)d<0$에서 $d<0$이므로

$n-13>0$ $\therefore\ n>13$

따라서 처음으로 음수가 나오는 항은 제 14 항이다.

답 **제 14 항**

0908 등차수열 1, a_1, a_2, a_3, …, a_n, 100의 공차를 d라 하면

$100=1+(n+2-1)d$, $99=(n+1)d$

$\therefore\ \dfrac{99}{d}=n+1$

이때 n은 자연수이므로 $\dfrac{99}{d}$도 자연수이어야 한다.

따라서 보기 중 $\dfrac{99}{d}$의 값이 자연수가 되도록 하는 d의 값은 $\dfrac{9}{11}$이다.

답 ④

0909 등차수열 3, x, y, z, 23의 공차를 d라 하면

$23=3+4d$ $\therefore\ d=5$

$x=3+d=3+5=8$, $y=x+d=8+5=13$,

$z=y+d=13+5=18$

답 $x=8$, $y=13$, $z=18$

0910 -20을 첫째항이라 하면 100은 제$(n+2)$항이다. 공차가 4이므로

$100=-20+4(n+1)$

$120=4(n+1)$, $n+1=30$

$\therefore\ n=29$

답 **29**

0911 등차수열 3, a_1, a_2, a_3, …, a_n, 108의 공차를 d라 하면

$3+(n+1)d=108$

$(n+1)d=105=3\cdot5\cdot7$

위의 식에서 1보다 큰 최소의 자연수인 공차는 3이므로

$n+1=35$ $\therefore\ n=34$

답 **34**

다른풀이 $(n+1)d=105$에서 $d=\dfrac{105}{n+1}$

이때 d는 1보다 큰 자연수이므로 순서쌍 (n, d)는

$(2, 35)$, $(4, 21)$, $(6, 15)$, $(14, 7)$, $(20, 5)$, $(34, 3)$

따라서 최소의 자연수인 공차는 3이므로 $n=34$

0912 수열 $\{a_n\}$에서 $2x=-9+(-1)$

$\therefore x=-5$

수열 $\{b_n\}$에서 $2y=-1+5$ $\therefore y=2$

$\therefore x+y=-3$

답 ③

0913 $f(x)=ax^2+x+4$라 하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2f(2)=f(1)+f(3)$

$2(4a+2+4)=(a+1+4)+(9a+3+4)$

$8a+12=10a+12$

$\therefore a=0$

답 ③

0914 $\log a$, $\log 3$, $\log b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log 3=\log a+\log b$, $\log 3^2=\log ab$

$\therefore ab=9$

a, b는 서로 다른 자연수이므로

$a=1$, $b=9$ 또는 $a=9$, $b=1$

따라서 두 자연수 a, b의 합은

$a+b=10$

답 **10**

0915 삼차방정식의 세 근을 $a-d$, a, $a+d$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$, $3a=6$ $\therefore a=2$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$를 방정식에 대입하면

$2^3-6\cdot 2^2+2k+24=0$, $2k=-8$ $\therefore k=-4$

답 ④

0916 등차수열을 이루는 세 수 a, b, c를 각각 $x-d$, x, $x+d$ $(d>0)$라 하면

조건 ㈎에서

$a+b+c=(x-d)+x+(x+d)=3x=15$ $\therefore x=5$

조건 ㈏에서

$abc=(x-d)\cdot x\cdot(x+d)=5(5-d)(5+d)=-55$

$25-d^2=-11$

$d^2=36$ $\therefore d=6$ $(\because d>0)$

$a=x-d=-1$, $b=x=5$, $c=x+d=11$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-1)^2+5^2+11^2$

$=1+25+121=147$

답 **147**

0917 ⑴ 등차수열을 이루는 네 수를

$a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ $(d>0)$라 하면

네 수의 합이 8이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=8$

$4a=8$ $\therefore a=2$

가장 큰 수는 가장 작은 수의 3배이므로

$2+3d=3(2-3d)$

$12d=4$ $\therefore d=\frac{1}{3}$

따라서 네 수는 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, 3이므로 네 수의 곱은

$1\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot 3=\frac{35}{3}$

⑵ 등차수열을 이루는 세 수를

$a-d$, a, $a+d$ $(d>0)$라 하면

빗변의 길이가 15이므로

$a+d=15$ …… ㉠

직각삼각형이므로

$(a+d)^2=(a-d)^2+a^2$

$a(a-4d)=0$ $\therefore a=4d$ $(\because a\neq 0)$

$a=4d$를 ㉠에 대입하면

$a=12$, $d=3$

따라서 세 변의 길이가 9, 12, 15이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12=54$

답 ⑴ $\frac{35}{3}$ ⑵ **54**

0918 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=a+5d=44$ …… ㉠

$a_{18}=a+17d=116$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=14$, $d=6$

첫째항부터 제 n 항까지의 합이 280이므로

$\frac{n\{2\cdot 14+(n-1)\cdot 6\}}{2}=280$

$3n^2+11n-280=0$, $(n-8)(3n+35)=0$

$\therefore n=8$ 또는 $n=-\frac{35}{3}$

그런데 n은 자연수이므로 $n=8$

답 ②

0919 $a_n=3+2(n-1)=39$

$\therefore n=19$

따라서 첫째항부터 제 19 항까지의 합은

$S_{19}=\frac{19\cdot(3+39)}{2}=399$

답 **399**

0920 $S_n=\frac{n(15-3)}{2}=6n=60$에서 $n=10$

즉 제 10 항이 -3이므로

$a_{10}=15+9d=-3 \quad \therefore d=-2$

$\therefore a_5=15+4d=15+4\cdot(-2)=7$

답 **7**

0921 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=6$, $a_{10}=-12$에서

$6+(10-1)d=-12 \quad \therefore d=-2$ ····· ㉮

$\therefore a_n=6+(n-1)\cdot(-2)=-2n+8$ ····· ㉯

$\therefore |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=|6|+|4|+|2|+|0|+|-2|+|-4|+\cdots+|-32|$

$=(6+4+2+0)+(2+4+\cdots+32)$

$=12+\frac{16(2+32)}{2}$

$=284$ ····· ㉰

답 **284**

단계	채점요소	배점
㉮	공차 구하기	30%
㉯	일반항 구하기	20%
㉰	$\|a_1\|+\|a_2\|+\|a_3\|+\cdots+\|a_{20}\|$의 값 구하기	50%

0922 $24+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+(-44)$

$=24+(-120)+(-44)=-140$

즉 $\frac{(n+2)\{24+(-44)\}}{2}=-140$에서

$n+2=14 \quad \therefore n=12$

답 **12**

0923 첫째항이 -9, 끝항이 31, 항수가 $(n+2)$인 등차수열이고 첫째항부터 끝항까지의 합이 231이므로

$\frac{(n+2)(-9+31)}{2}=231$, $11(n+2)=231$

$n+2=21 \quad \therefore n=19$

따라서 31은 제 21 항이므로

$-9+(21-1)d=31 \quad \therefore d=2$

답 ④

0924 첫째항이 2, 제$(n+2)$항이 37이므로

$2+(n+1)d=37$

$\therefore (n+1)d=35$

모든 항이 자연수이므로 가능한 순서쌍 (n, d)는

$(4, 7)$, $(6, 5)$, $(34, 1)$

이 등차수열의 합은

$\frac{(n+2)(2+37)}{2}=\frac{39}{2}(n+2)$

이므로 $n=4$일 때 최소가 되고, 최솟값은

$\frac{39}{2}\cdot 6=117$

답 **117**

0925 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=145$

$\therefore 2a+9d=29$ ····· ㉠

$S_{20}-S_{10}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}-145=445$

$\therefore 2a+19d=59$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=3$

따라서 제 21 항부터 제 30 항까지의 합은

$S_{30}-S_{20}=\frac{30\{2+(30-1)\cdot 3\}}{2}-590$

$=1335-590=745$

답 ⑤

0926 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=70$

$\therefore a+2d=14$ ····· ㉠

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=190$

$\therefore 2a+9d=38$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $d=2$

$\therefore S_{15}=\frac{15\{2\cdot 10+(15-1)\cdot 2\}}{2}=360$

답 **360**

0927 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$=a+(a+d)+\cdots+(a+9d)=55$

$S_{20}-S_{10}=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$

$=(a+10d)+(a+11d)+\cdots+(a+19d)$

$=S_{10}+10d\cdot 10=55+100d$

$=210-55=155$

$100d=100 \quad \therefore d=1$

$\therefore S_{15}-S_5=a_6+a_7+\cdots+a_{15}$

$=(a+5d)+(a+6d)+\cdots+(a+14d)$

$=S_{10}+5d\cdot 10=55+50=105$

답 ④

다른풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=55$

$\therefore\ 2a+9d=11$ ····· ㉠

$S_{20}=\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=210$

$\therefore\ 2a+19d=21$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=1$

$\therefore\ S_{15}-S_5=\dfrac{15\{2\cdot1+(15-1)\cdot1\}}{2}-\dfrac{5\{2\cdot1+(5-1)\cdot1\}}{2}$

$=120-15=105$

0928 $a_n=-\dfrac{5}{2}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}n-\dfrac{17}{6}$

제 n 항에서 처음으로 양수가 나온다고 하면

$a_n=\dfrac{1}{3}n-\dfrac{17}{6}>0 \quad \therefore\ n>\dfrac{17}{2}=8.5$

즉 제 9 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 8 항까지의 합이 최소가 된다. 따라서 구하는 n의 값은 8이다.

답 8

0929 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

S_{17}이 최댓값이므로 $a_{17}\geq0$, $a_{18}<0$에서

$100+16d\geq0$, $100+17d<0$

$\therefore\ -\dfrac{25}{4}\leq d<-\dfrac{100}{17}$

즉 $-6.25\leq d<-5.\times\times\times$에서 d는 정수이므로

$d=-6$

$\therefore\ a_{10}=100+(10-1)\cdot(-6)=46$

답 ②

0930 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=11$에서 $a+4d=11$ ····· ㉠

$a_{15}=-9$에서 $a+14d=-9$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=19$, $d=-2$

제 n 항에서 처음으로 음수가 나온다고 하면

$a_n=19+(n-1)\cdot(-2)=-2n+21<0$

$\therefore\ n>\dfrac{21}{2}=10.5$

즉 제 11 항부터 음수이므로 제 10 항까지의 합이 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$S_{10}=\dfrac{10\{2\cdot19+9\cdot(-2)\}}{2}=100$

답 **100**

0931 등차수열 59, a_1, a_2, a_3, ⋯, a_k, 32의 모든 항의 합이 455이므로

$\dfrac{(k+2)(59+32)}{2}=455$

$k+2=10 \quad \therefore\ k=8$ ····· ㉮

이 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 59, 제 10 항이 32이므로

$59+9d=32 \quad \therefore\ d=-3$ ····· ㉯

$a_1=59-3=56$이므로 제 n 항에서 처음으로 음수가 나온다고 하면

$a_n=56-3(n-1)<0 \quad \therefore\ n>\dfrac{59}{3}=19.\times\times\times$

등차수열 $\{a_n\}$은 제 20 항부터 음수이므로 첫째항부터 제 19 항까지의 합이 최대이다. ····· ㉰

$\therefore\ S_{19}=\dfrac{19\{2\cdot56+18\cdot(-3)\}}{2}=551$ ····· ㉱

답 **551**

단계	채점요소	배점
㉮	k의 값 구하기	20 %
㉯	공차 구하기	20 %
㉰	합이 최대가 되는 항 구하기	30 %
㉱	S_n의 최댓값 구하기	30 %

0932 두 자리 자연수 중 7로 나누었을 때 2가 남는 수는

16, 23, 30, ⋯, 93

즉 첫째항이 16이고 공차가 7인 등차수열이므로 93을 제 n 항이라 하면

$a_n=16+7(n-1)=93 \quad \therefore\ n=12$

$\therefore\ S_{12}=\dfrac{12\cdot(16+93)}{2}=654$

답 ④

0933 50 이하의 자연수 중에서 4의 배수는

4, 8, 12, ⋯, 48

이 수열은 첫째항이 4, 끝항이 48, 항수가 12인 등차수열이므로 그 합은

$\dfrac{12(4+48)}{2}=312$

50 이하의 자연수 중에서 6의 배수는

6, 12, 18, ⋯, 48

이 수열은 첫째항이 6, 끝항이 48, 항수가 8인 등차수열이므로 그 합은

$\dfrac{8(6+48)}{2}=216$

한편, 50 이하의 자연수 중에서 12의 배수는

12, 24, 36, 48

이 수열은 첫째항이 12, 끝항이 48, 항수가 4인 등차수열이므로 그 합은

$\dfrac{4(12+48)}{2}=120$

따라서 50 이하의 자연수 중에서 4 또는 6의 배수의 총합은
$312+216-120=408$

답 408

0934 6으로 나누면 5가 남는 수는
5, 11, 17, 23, 29, 35, …
8로 나누면 3이 남는 수는
3, 11, 19, 27, 35, …
이들의 공통인 수로 이루어진 수열을 크기순으로 나열하면
11, 35, 59, …
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 11, 공차가 24이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_8=\frac{8\{2\cdot 11+(8-1)\cdot 24\}}{2}=760$

답 ③

0935 $S_n=-3n^2+2n$에서
$a_1=S_1=-3+2=-1$
$a_{10}=S_{10}-S_9$
$=(-3\cdot 10^2+2\cdot 10)-(-3\cdot 9^2+2\cdot 9)$
$=-55$
$\therefore a_1+a_{10}=-1-55=-56$

답 ②

0936 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2+kn$이라 하면
$a_8=S_8-S_7=(8^2+8k)-(7^2+7k)$
$=15+k$
또한 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=2n^2+n$이라 하면
$b_8=T_8-T_7=(2\cdot 8^2+8)-(2\cdot 7^2+7)$
$=31$
$a_8=b_8$이므로
$15+k=31 \quad \therefore k=16$

답 16

0937 $S_n=-(n-2)^2+k$에서
(i) $n\geq 2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=\{-(n-2)^2+k\}-\{-(n-3)^2+k\}$
$=-2n+5$ …… ㉠
(ii) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=-1+k$
$a_1=-1+k$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로
$-1+k=-2+5 \quad \therefore k=4$
$\therefore a_1=-1+4=3$
$\therefore a_1+k=3+4=7$

답 7

0938 $S_n=n^2+3n+1$에서
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2+3n+1)-\{(n-1)^2+3(n-1)+1\}$
$=2n+2\ (n\geq 2)$
$a_1=S_1=5$
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=5+\frac{4(8+20)}{2}$
$=5+56=61$

답 61

0939 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_2=ar=2$ …… ㉠
$a_5=ar^4=16$ …… ㉡
㉡÷㉠을 하면 $r^3=8 \quad \therefore r=2$
$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=1$
$\therefore a_{10}=ar^9=1\cdot 2^9=512$

답 ③

0940 $a_n=2\cdot 3^{1-2n}$에서
$a_1=2\cdot 3^{-1}=\frac{2}{3}$, $a_2=2\cdot 3^{-3}=\frac{2}{27}$
따라서 공비는
$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{2}{27}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

답 첫째항 : $\frac{2}{3}$, 공비 : $\frac{1}{9}$

0941 (1) 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=-2$이므로
$a_n=\frac{1}{4}\cdot(-2)^{n-1}$
즉 $\frac{1}{4}\cdot(-2)^{n-1}=256$에서
$(-2)^{n-1}=1024=(-2)^{10}$
$n-1=10 \quad \therefore n=11$
따라서 256은 제 11 항이다.
(2) 첫째항이 $\sqrt{2}+1$, 공비가 $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$이므로
$a_n=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{n-1}$
$\therefore a_{100}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{99}$
$=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{98}$
$=(\sqrt{2}-1)^{98}$

답 (1) 제 11 항 (2) $(\sqrt{2}-1)^{98}$

0942 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_1+a_2=a+ar$
$=a(1+r)=3$ …… ㉠

$a_1a_2+a_1a_3=a\cdot ar+a\cdot ar^2$

$=a^2r(1+r)=12$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $ar=4$

$\therefore a_1a_2a_3=a\cdot ar\cdot ar^2=a^3r^3=(ar)^3=4^3=64$

답 ⑤

0943 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$(a_1+a_2):(a_3+a_4)=1:\sqrt{2}$에서

$(a_1+a_1r):(a_1r^2+a_1r^3)=1:r^2=1:\sqrt{2}$이므로 $r^2=\sqrt{2}$

$\therefore a_3:a_7=a_1r^2:a_1r^6=1:r^4=1:(r^2)^2=1:2$

답 ①

0944 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a_{12}}{a_2}=\frac{ar^{11}}{ar}=r^{10}$, $\frac{a_{13}}{a_3}=\frac{ar^{12}}{ar^2}=r^{10}$, …, $\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{ar^{20}}{ar^{10}}=r^{10}$

이므로

…… ㉮

$\frac{a_{12}}{a_2}+\frac{a_{13}}{a_3}+\frac{a_{14}}{a_4}+\cdots+\frac{a_{21}}{a_{11}}=10r^{10}=20$

$\therefore r^{10}=2$

…… ㉯

$\therefore \frac{a_{50}}{a_{30}}=\frac{ar^{49}}{ar^{29}}=r^{20}=(r^{10})^2=2^2=4$

…… ㉰

답 4

단계	채점요소	배점
㉮	각 항을 r에 대한 식으로 나타내기	40 %
㉯	r^{10}의 값 구하기	40 %
㉰	$\frac{a_{50}}{a_{30}}$의 값 구하기	20 %

0945 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=4$ …… ㉠

$a_6=ar^5=32$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=8$ $\therefore r=2$ ($\because r$는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=1$

$\therefore a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}>2000$

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$n-1\geq 11$ $\therefore n\geq 12$

따라서 처음으로 2000보다 커지는 항은 제 12 항이다.

답 ③

0946 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=40$ …… ㉠

$a_5=ar^4=5$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=\frac{1}{8}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r$는 실수)

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=80$

$\therefore a_n=80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{50}$

즉 $2^{n-1}>4000$에서 $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$n-1\geq 12$ $\therefore n\geq 13$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 13이다.

답 13

0947 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_3=ar+ar^2=ar(1+r)=6$ …… ㉠

$a_3+a_4=ar^2+ar^3=ar^2(1+r)=-18$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=-3$

$r=-3$을 ㉠에 대입하면 $a=1$

$a_n=1\cdot(-3)^{n-1}=(-3)^{n-1}$이므로

$\left|\frac{1}{a_n}\right|=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}>\frac{1}{1000}$

즉 $3^{n-1}<1000$에서 $3^6=729$, $3^7=2187$이므로

$n-1\leq 6$ $\therefore n\leq 7$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 1, 2, 3, …, 7이므로 구하는 합은

$1+2+\cdots+7=28$

답 28

0948 공비를 r라 하면 첫째항이 3이고 제12항이 40이므로

$40=3\cdot r^{11}$ $\therefore r^{11}=\frac{40}{3}$

$\therefore a_2a_9=(3r^2)\cdot(3r^9)=9r^{11}=9\cdot\frac{40}{3}=120$

답 ⑤

0949 첫째항이 18, 공비가 $\frac{1}{3}$이고 $\frac{2}{729}$는 제 $(n+2)$ 항이므로

$18\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{2}{729}=\frac{2}{3^6}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{3^8}=\left(\frac{1}{3}\right)^8$

$n+1=8$ $\therefore n=7$

답 ③

0950 공비를 r라 하면 첫째항이 1이고 제 12 항이 2이므로

$r^{11}=2$

$a_1=r$, $a_2=r^2$, $a_3=r^3$, …, $a_{10}=r^{10}$이므로

$a_1a_2a_3\cdots a_{10}=r\cdot r^2\cdot r^3\cdot\cdots\cdot r^{10}$
$=r^{1+2+3+\cdots+10}$
$=r^{55}=(r^{11})^5=2^5=32$

답 ⑤

0951 첫째항이 2이고 제 $(n+2)$항이 512이므로
$2\cdot r^{n+1}=512$
$\therefore r^{n+1}=256=2^8$
이를 만족시키는 자연수 r과 n의 순서쌍 (r, n)은
$(2, 7), (4, 3), (16, 1)$
따라서 $n+r$의 최솟값은
$4+3=7$

답 **7**

0952 세 수 $x-1$, $x+2$, $4x+1$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(x+2)^2=(x-1)(4x+1)$
$x^2+4x+4=4x^2-3x-1$
$\therefore 3x^2-7x-5=0$
따라서 모든 상수 x의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{7}{3}$이다.

답 ④

0953 $f(2)=3a+4$, $f(0)=a$, $f(-1)=1$
이때 세 수 $3a+4$, a, 1이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a^2=(3a+4)\cdot 1$, $a^2-3a-4=0$
따라서 모든 상수 a의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 3이다.

답 ③

0954 1, 3, a가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$3^2=a$ $\therefore a=9$
2, b, 18이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$b^2=36$ $\therefore b=6$ $(\because b>0)$
1, 2, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$2^2=c$ $\therefore c=4$
$c(=4)$, 12, d가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$12^2=4d$ $\therefore d=36$
$\therefore a+b+c+d=55$

답 **55**

0955 1, a, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2a=1+b$ $\therefore b=2a-1$ …… ㉠
a, $\sqrt{3}$, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(\sqrt{3})^2=ab$ $\therefore ab=3$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $a(2a-1)=3$
$2a^2-a-3=0$, $(2a-3)(a+1)=0$
$\therefore a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=-1$
그런데 a는 정수이므로 $a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-3$
$\therefore a^2+b^2=10$

답 **10**

0956 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$
α, p, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2p=\alpha+\beta=6$ $\therefore p=3$
α, q, β가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$q^2=\alpha\beta=4$ $\therefore q=2$ $(\because q>0)$
따라서 이차항의 계수가 1이고 3, 2를 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(3+2)x+3\cdot 2=0$
$\therefore x^2-5x+6=0$

답 ⑤

0957 등차수열의 공차를 d라 하면
$a+b=a+(a+3d)=(a+d)+(a+2d)$
$=x+y=5$ …… ㉠ ····· ㉮
등비수열의 공비를 r라 하면
$ab=a\cdot ar^3=ar\cdot ar^2=pq=6$ …… ㉡ ····· ㉯
㉠, ㉡에서 a, b는 t에 대한 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로
$(t-2)(t-3)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=3$
$a<b$이므로 $a=2$, $b=3$ ····· ㉰
$\therefore a^2-b^2=4-9=-5$ ····· ㉱

답 **−5**

단계	채점요소	배점
㉮	$a+b$의 값 구하기	20 %
㉯	ab의 값 구하기	20 %
㉰	a, b의 값 구하기	50 %
㉱	a^2-b^2의 값 구하기	10 %

0958 등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2이라 하면
$a+ar+ar^2=a(1+r+r^2)=13$ …… ㉠
$a\cdot ar\cdot ar^2=(ar)^3=27$ $\therefore ar=3$ …… ㉡

㉡에서 $a=\frac{3}{r}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{r}(1+r+r^2)=13,\ 3r^2-10r+3=0$

$(3r-1)(r-3)=0 \quad \therefore r=\frac{1}{3}$ 또는 $r=3$

$\therefore a=9$ 또는 $a=1$

따라서 세 실수는 1, 3, 9이므로 가장 큰 수는 9이다.

답 ④

0959 주어진 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=k$ …… ㉠

$a^2r+a^2r^2+a^2r^3=56$ …… ㉡

$a\cdot ar\cdot ar^2=64$ …… ㉢

㉢에서 $(ar)^3=64 \quad \therefore ar=4$ …… ㉣

㉡에서 $ar(a+ar+ar^2)=56$

㉠, ㉣을 대입하면

$4k=56 \quad \therefore k=14$

답 **14**

0960 두 곡선 $y=x^3-4x^2+14x$, $y=3x^2+k$가 서로 다른 세 점에서 만나므로 $x^3-4x^2+14x=3x^2+k$, 즉

$x^3-7x^2+14x-k=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

세 실근을 a, ar, ar^2이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=a(1+r+r^2)=7$ …… ㉠

$a^2r+a^2r^2+a^2r^3=a^2r(1+r+r^2)=14$ …… ㉡

$a\cdot ar\cdot ar^2=a^3r^3=(ar)^3=k$ …… ㉢

㉡÷㉠을 하면 $ar=2$

이를 ㉢에 대입하면

$2^3=k \quad \therefore k=8$

답 8

0961 직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 a, ar, ar^2이라 하면

직육면체의 모서리의 길이의 합이 104이므로

$4a(1+r+r^2)=104$

$\therefore a(1+r+r^2)=26$ …… ㉠

직육면체의 겉넓이가 312이므로

$2(a^2r+a^2r^2+a^2r^3)=312$

$a^2r(1+r+r^2)=156$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$ar=\frac{156}{26}=6$

따라서 직육면체의 부피는

$a\cdot ar\cdot ar^2=(ar)^3=6^3=216$

답 **216**

0962 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=32$ …… ㉠

$a_6=ar^5=4$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=\frac{1}{8} \quad \therefore r=\frac{1}{2}$

㉠에서 $a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=32 \quad \therefore a=128$

따라서 첫째항이 128, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{128\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=256\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}=256-\frac{1}{4}$

$\therefore S_{10}+\frac{1}{4}=256$

답 ②

0963 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2 : a_5=1 : 27$에서

$27a_2=a_5$

$27ar=ar^4$

$r^3=27 \quad \therefore r=3\ (\because r$는 실수)

$a_{11}-a_1=ar^{10}-a=a(r^{10}-1)=3^{10}-1$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=\frac{3^{10}-1}{3-1}=\frac{3^{10}-1}{2}$

답 ①

0964 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_3=a+ar^2=a(1+r^2)=15$ …… ㉠

$a_3+a_5=ar^2+ar^4=ar^2(1+r^2)=60$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=4 \quad \therefore r=-2\ (\because r<0)$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$a\{1+(-2)^2\}=15 \quad \therefore a=3$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{3\cdot\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=1-2^{10}=-1023$

답 **−1023**

0965 공비는 $2x+1$이고 $x\neq0$에서 $2x+1\neq1$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{1\cdot\{(2x+1)^n-1\}}{2x+1-1}=\frac{(2x+1)^n-1}{2x}$

답 $\frac{(2x+1)^n-1}{2x}$

0966 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 첫째항은 x, 공비는 $\frac{1}{x+1}$이므로

(i) $\frac{1}{x+1}\neq 1$, 즉 $x\neq 0$일 때,

$$S_n=\frac{x\left\{1-\left(\frac{1}{x+1}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{x+1}}=(x+1)\left\{1-\left(\frac{1}{x+1}\right)^n\right\}$$

$$=x+1-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{n-1}$$

(ii) $\frac{1}{x+1}=1$, 즉 $x=0$일 때,

모든 항이 0이므로 $S_n=0$

답 $x\neq 0$일 때 $x+1-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{n-1}$, $x=0$일 때 0

0967 첫째항이 1, 공비가 x이므로

$x=1$인 경우, $S_n(1)=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n개}=n$

$x\neq 1$인 경우, $S_n(x)=\frac{1\cdot(x^n-1)}{x-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$

$\therefore S_n(1)+S_n(2)=n+\frac{2^n-1}{2-1}=n+2^n-1$

답 ③

0968 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=2$ …… ㉠

$\frac{ar^{10}(r^{10}-1)}{r-1}=12$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^{10}=6$

따라서 제 21 항부터 제 30 항까지의 합은

$\frac{ar^{20}(r^{10}-1)}{r-1}=(r^{10})^2\cdot\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=6^2\cdot 2=72$

답 ②

0969 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=a(1+r+\cdots+r^9)=2$

$S_{20}-S_{10}=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$

$=ar^{10}(1+r+\cdots+r^9)$

$=66-2=64$

$\therefore r^{10}=32$

모든 항이 양수이므로

$r=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

0970 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$S_{2n}-S_n=r^nS_n$

$1275-75=r^n\cdot 75$ $\therefore r^n=16$

$S_n=\frac{5\cdot(r^n-1)}{r-1}=75$에 $r^n=16$을 대입하면

$\frac{5\cdot(16-1)}{r-1}=75$ $\therefore r=2$

$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$

$=5+5r^2+5r^4+\cdots+5r^{2n-2}$

$=\frac{5\cdot\{(r^2)^n-1\}}{r^2-1}=\frac{5\cdot(16^2-1)}{2^2-1}=425$

답 425

0971 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=3$ …… ㉠

$a_5=ar^4=24$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=8$ $\therefore r=2$ ($\because r$는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$2a=3$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\frac{\frac{3}{2}(2^n-1)}{2-1}=\frac{3}{2}(2^n-1)$

$S_n>720$에서

$\frac{3}{2}(2^n-1)>720$, $2^n-1>480$

$\therefore 2^n>481$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$n\geq 9$

따라서 첫째항부터 제 9 항까지의 합이 처음으로 720보다 커진다.

답 9

0972 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$

$|2-S_n|<0.01$에서

$\left|2-\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right|<0.01$, $\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{100}$

$\therefore 2^{n-1}>100$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로

$n-1\geq 7$ $\therefore n\geq 8$

따라서 n의 최솟값은 8이다.

답 ③

0973 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$(a_1+a_2):(a_3+a_4)=1:4$

$a_3+a_4=4(a_1+a_2)$

$a_1r^2+a_1r^3=4(a_1+a_1r)$

$r^2=4$ $\therefore r=2$ ($\because r>0$)

$S_n=\frac{a_1(2^n-1)}{2-1}>100a_1$

$2^n-1>100$ ($\because a_1>0$) $\therefore 2^n>101$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로 $n\geq 7$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다.

답 7

0974 $2S_n+1=5^n$에서 $S_n=\dfrac{5^n-1}{2}$

(i) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\dfrac{5^n-1}{2}-\left(\dfrac{5^{n-1}-1}{2}\right)$

$=\dfrac{5^{n-1}}{2}(5-1)=2\cdot 5^{n-1}$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=\dfrac{5^1-1}{2}=2$

$a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\cdot 5^{n-1}$

따라서 $a=2$, $r=5$이므로 $a-r=-3$

답 ②

0975 $S_n=2^n-2$에서

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-2)-(2^{n-1}-2)=2^{n-1}$ $(n\geq 2)$

이고 $a_1=S_1=0$

$\therefore a_1+a_3+a_5=0+2^2+2^4=20$

답 ②

0976 (i) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3^{n-1}+k-(3^{n-2}+k)$

$=2\cdot 3^{n-2}$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1+k$

$a_1=1+k$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$1+k=\dfrac{2}{3}$ $\therefore k=-\dfrac{1}{3}$

답 $-\dfrac{1}{3}$

유형 up

본문 126~127쪽

0977 $S_n=2n^2-n+1$에서

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-n+1)-\{2(n-1)^2-(n-1)+1\}$

$=4n-3$ $(n\geq 2)$

이고 $a_1=S_1=2$

이때 $a_{2n}=8n-3$이므로

$a_{2n+2}-a_{2n}=\{8(n+1)-3\}-(8n-3)=8$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$의 공차는 8이다.

답 8

0978 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$도 등비수열이다. 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$T_3=\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=\dfrac{1}{4}$ …… ㉠

$T_6=\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=\dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=1$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $1+r^3=4$ $\therefore r^3=3$

$\therefore T_9=\dfrac{a(1-r^9)}{1-r}=\dfrac{a(1-r^3)(1+r^3+r^6)}{1-r}$

$=\dfrac{1}{4}(1+3+3^2)=\dfrac{13}{4}$

답 ⑤

0979 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$\therefore 3a_n-a_{n+1}=3ar^{n-1}-ar^n=(3-r)ar^{n-1}$

이때 수열 $\{3a_n-a_{n+1}\}$은 첫째항이 $(3-r)a$이고 공비가 r인 등비수열이므로

$r=-3$

$(3-r)a=18$에서 $a=3$

따라서 $a_n=3\cdot(-3)^{n-1}$이므로

$a_2=3\cdot(-3)=-9$

답 -9

0980 10년 말의 원리합계를 S만 원이라 하면

$S=100(1+0.05)+100(1+0.05)^2+\cdots+100(1+0.05)^{10}$

$=\dfrac{100(1+0.05)\{(1+0.05)^{10}-1\}}{0.05}$

$=\dfrac{100\times 1.05\times 0.6}{0.05}$

$=1260$ (만 원)

답 1260만 원

0981 철수의 2027년 말의 원리합계를 S_1만 원이라 하면

$S_1=10(1+0.1)+10(1+0.1)^2+\cdots+10(1+0.1)^{10}$

$=\dfrac{10\times 1.1\times(1.1^{10}-1)}{1.1-1}=176$ (만 원)

…… ㉮

영희의 2027년 말의 원리합계를 S_2만 원이라 하면

$S_2=15+15(1+0.06)+15(1+0.06)^2+\cdots+15(1+0.06)^9$

$=\dfrac{15(1.06^{10}-1)}{1.06-1}=200$ (만 원)

…… ㉯

따라서 두 원리합계의 차액은
$S_2-S_1=200-176=24$ (만 원) ····· ㉢

답 24만 원

단계	채점요소	배점
㉮	철수의 원리합계 구하기	40 %
㉯	영희의 원리합계 구하기	40 %
㉰	두 사람의 원리합계의 차액 구하기	20 %

0982 1년 후의 적립금의 원리합계는
$a(1+0.01)+a(1+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{12}$
$=\dfrac{a\times1.01\times(1.01^{12}-1)}{1.01-1}$
$=1000000$
$\therefore a=\dfrac{1000000\times0.01}{1.01(1.01^{12}-1)}$
$=\dfrac{10000}{1.01(1.13-1)}$
$=76161.\times\times\times$
따라서 a의 값은 76200이다.

답 ⑤

0983 두 직선과 선분의 교점의 x좌표를 t라 할 때 선분의 길이를 $f(t)$라 하면
$f(t)=a(t-1)-t=at-a-t=(a-1)t-a$
그러므로 주어진 14개의 선분의 길이는 등차수열을 이룬다.
따라서 구하는 선분의 길이의 합은
$\dfrac{14(3+42)}{2}=315$

답 ③

0984 $\overline{BH}=a-d$, $\overline{CH}=a$, $\overline{AB}=a+d$라 하면
$\triangle ABH\backsim\triangle CBA$이므로
$\overline{AB}:\overline{BH}=\overline{CB}:\overline{BA}$
즉 $(a+d):(a-d)=(2a-d):(a+d)$
$(a+d)^2=(a-d)(2a-d)$
$a^2=5ad$
$\therefore a=5d$ ($\because a>0$)

따라서 $\overline{AB}=a+d=5d+d=6d$,
$\overline{BC}=2a-d=10d-d=9d$, $\overline{AC}=5$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$81d^2=36d^2+25$, $45d^2=25$
$d^2=\dfrac{5}{9}$ $\therefore d=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ($\because d>0$) ····· ㉮

따라서 선분 BC의 길이는
$9d=9\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=3\sqrt{5}$ ····· ㉯

답 $3\sqrt{5}$

단계	채점요소	배점
㉮	a와 d 사이의 관계 나타내기	40 %
㉯	d의 값 구하기	30 %
㉰	선분 BC의 길이 구하기	30 %

0985 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 -2인 등비수열이므로
$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$
이때 $A_n(n,\ a_n)$, $B_n(n,\ 0)$, $B_{n+1}(n+1,\ 0)$이므로 삼각형 $A_nB_nB_{n+1}$의 넓이는
$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot|a_n|\cdot1=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot|-2|^{n-1}\cdot1=\dfrac{3}{2}\cdot2^{n-1}$
즉 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{3}{2}$, 공비가 2인 등비수열이므로
$S_1+S_3+S_5+S_7+S_9=\dfrac{3}{2}(1+2^2+2^4+2^6+2^8)$
$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1\cdot(4^5-1)}{4-1}=\dfrac{4^5-1}{2}$

답 ④

0986 ✡ 모양의 도형의 넓이는 형 S_1의 넓이는 12개의 합동인 작은 정삼각형의 넓이의 합과 같다. 도형 S_1에서 작은 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면 $\sqrt{3}a=2\sqrt{3}$이므로 $a=2$
따라서 S_1의 넓이는
$12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot2^2=12\sqrt{3}$
또한 S_n과 S_{n+1}은 닮은 도형이고 닮음비가 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1이다.
따라서 S_{10}의 넓이는
$12\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^9=3\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^8=\dfrac{3\sqrt{3}}{2^{16}}$

답 ④

시험에 꼭 나오는 문제 본문 128~131쪽

0987 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2=8$에서 $a+d=8$ ····· ㉠
$a_6:a_{10}=5:8$에서
$(a+5d):(a+9d)=5:8$
$5(a+9d)=8(a+5d)$, $3a=5d$
$\therefore a=\dfrac{5}{3}d$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{8}{3}d=8 \quad \therefore d=3,\ a=5$

$\therefore a_{20}=5+19\cdot 3=62$

답 **62**

0988 $a_n=3+(n-1)d=4d$이므로

$nd-5d=-3 \quad \therefore (n-5)d=-3$

이때 n, d가 모두 자연수이므로

$n=2$일 때, $d=1$

$n=4$일 때, $d=3$

따라서 모든 자연수 d의 값의 합은 $1+3=4$

답 ②

0989 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=-35$ …… ㉠

$a_{10}=a+9d=-20$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-47,\ d=3$

$\therefore a_n=-47+(n-1)\cdot 3=3n-50$

$3n-50>0$에서 $3n>50$

$\therefore n>\frac{50}{3}=16.\times\times\times$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제 17 항이다.

답 ④

0990 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_{20}=a+19d=-15$ …… ㉠

$S_{20}=\frac{20(2a+19d)}{2}=270$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=42,\ d=-3$

$\therefore S_{30}=\frac{30\cdot\{2\cdot 42+29\cdot(-3)\}}{2}=-45$

답 ②

0991 첫째항이 -10이고 제$(n+2)$항이 30이므로

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{n+2}=-10+120+30=140$

이때 주어진 수열이 등차수열이므로

$S_{n+2}=\frac{(n+2)(-10+30)}{2}=140$

$10(n+2)=140,\ n+2=14$

$\therefore n=12$

답 ②

0992 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=12$ …… ㉠

$a_9=a+8d=-38$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=42,\ d=-10$

제 n 항에서 처음으로 음수가 나온다고 하면

$a_n=42+(n-1)\cdot(-10)$

$=-10n+52<0$

$\therefore n>5.2$

즉 제 6 항부터 음수이므로 제 5 항까지의 합이 최대가 된다.

답 **5**

0993 60보다 작은 자연수 중에서 3의 배수는

3, 6, 9, …, 57

이 수열은 첫째항이 3, 끝항이 57, 항 수가 19인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{19(3+57)}{2}=570$

60보다 작은 자연수 중에서 4의 배수는

4, 8, 12, …, 56

이 수열은 첫째항이 4, 끝항이 56, 항 수가 14인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{14(4+56)}{2}=420$

한편, 60보다 작은 자연수 중에서 12의 배수는

12, 24, 36, 48

이 수열은 첫째항이 12, 끝항이 48, 항 수가 4인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{4(12+48)}{2}=120$

따라서 60보다 작은 자연수 중에서 3 또는 4로 나누어떨어지는 수의 총합은

$570+420-120=870$

답 **870**

0994 $a_1=S_1=1^2+p\cdot 1=3$에서 $p=2$

$\therefore S_n=n^2+2n$

$a_2=S_2-S_1$에서

$a_2=(2^2+2\cdot 2)-(1^2+2\cdot 1)=5$

한편, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$d=a_2-a_1=5-3=2$

$\therefore p+d=2+2=4$

답 ④

0995 $S_n=-2n^2+8n+1$에서

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(-2n^2+8n+1)-\{-2(n-1)^2+8(n-1)+1\}$

$=-4n+10\ (n\geq 2)$

$a_1=S_1=7$

$a_n=-4n+10<0$에서 $n>2.5$

즉 처음으로 음수가 되는 항은 제 3 항이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$
$=a_1+a_2-(a_3+a_4+\cdots+a_{10})$
$=7+2+\frac{8\cdot(2+30)}{2}=9+128=137$

답 **137**

0996 $S_n=n^2-2n+4$에서
(i) $n\geq2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2-2n+4)-\{(n-1)^2-2(n-1)+4\}$
$=2n-3$ …… ㉠
(ii) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=1-2+4=3$
그런데 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로
$a_1=3$, $a_n=2n-3$ $(n\geq2)$
ㄱ. $a_2=2\cdot2-3=1$ (참)
ㄴ. $a_3=2\cdot3-3=3$, $a_4=2\cdot4-3=5$
$a_3-a_1=3-3=0$, $a_4-a_2=5-1=4$
$\therefore a_3-a_1\neq a_4-a_2$ (거짓)
ㄷ. $a_n=2n-3>100$에서 $n>51.5$
그러므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 52이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0997 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$r=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3\cdot2^{-2n}}{3\cdot2^{2-2n}}=\frac{1}{2^{2-2n+2n}}=\frac{1}{4}$

답 ②

0998 3, 6, 12, …는 첫째항이 3이고, 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n=3\cdot2^{n-1}>300$
즉 $2^{n-1}>100$에서 $2^6=64$, $2^7=128$이므로
$n-1\geq7$ $\therefore n\geq8$
따라서 처음으로 300보다 커지는 항은 제8항이다.

답 **제8항**

0999 a_2, a_k, a_8이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$k=5$
또한 a_1, a_2, a_5가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a_2^2=a_1a_5$에서
$(a_1+6)^2=a_1(a_1+24)$, $12a_1=36$
$\therefore a_1=3$
$\therefore k+a_1=5+3=8$

답 ②

1000 철수가 만든 등차수열의 공차를 d라 하면
첫째항이 2, 제5항이 32이므로
$2+4d=32$ $\therefore d=\frac{15}{2}$
따라서 철수가 넣은 세 양수의 합 a는
$a=(2+d)+(2+2d)+(2+3d)$
$=6+6d=6+6\cdot\frac{15}{2}=51$
영희가 만든 등비수열의 공비를 r라 하면 첫째항이 2, 제5항이 32이므로
$2\cdot r^4=32$
$r^4=16$ $\therefore r=2$ $(\because r>0)$
따라서 영희가 넣은 세 양수의 합 b는
$b=4+8+16=28$
$\therefore a-b=51-28=23$

답 **23**

1001 세 양수 x, y, z가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$y=xr$, $z=xr^2$ $(r>0)$이라 하면
$x+y+z=x(1+r+r^2)=\frac{31}{2}$ …… ㉠
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1+r+r^2}{r^2}$
$=\frac{x(1+r+r^2)}{(xr)^2}=\frac{31}{8}$ …… ㉡
㉡÷㉠을 하면
$(xr)^2=4$ $\therefore xr=2$ $(\because xr>0)$
$\therefore xyz=x\cdot xr\cdot xr^2=(xr)^3=8$

답 **8**

1002 세 수 a^n, $2^3\cdot3^4$, b^n이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(2^3\cdot3^4)^2=a^nb^n$
$\therefore 2^6\cdot3^8=(ab)^n$
a, b, n이 모두 자연수이려면 n은 6과 8의 공약수, 즉 2의 약수이어야 한다. 이때 n은 2 이상의 자연수이므로
$n=2$
$\therefore ab=2^3\cdot3^4=648$

답 **648**

1003 주어진 등비수열의 공비를 r, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면
$S_n=\frac{2(1-r^n)}{1-r}=\frac{2-2r^n}{1-r}$
$=\frac{2-r\cdot2r^{n-1}}{1-r}$
$=\frac{2-32r}{1-r}=22$
$2-32r=22-22r$ $\therefore r=-2$
$\therefore x_4=2\cdot(-2)^4=32$

답 ⑤

1004 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=3^n-1$에서

$a_{2n-1}=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)=(3-1)\cdot 3^{n-1}$

$=2\cdot 3^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $a_1=2$, $a_3=6$이므로

$\frac{a_3}{a_1}=r^2=3$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{3}$

$\therefore a_4=a_1\cdot r^3=2\cdot(\sqrt{3})^3=6\sqrt{3}$

답 $6\sqrt{3}$

1005 MN의 약수는 M의 약수와 N의 약수의 곱으로 표현되므로 자연수 MN의 모든 양의 약수의 합은

$(1+2+2^2+\cdots+2^5)(1+3+3^2+\cdots+3^6)$

$=\frac{1\cdot(2^6-1)}{2-1}\cdot\frac{1\cdot(3^7-1)}{3-1}$

$=\frac{(2\cdot 2^5-1)(3\cdot 3^6-1)}{2}$

$=\frac{(2M-1)(3N-1)}{2}$

답 ①

1006 $b_n=\log_2 a_n$이라 하면 $b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{n^2+3n}{2}$

(i) $n\geq 2$일 때,

$b_n=\left(\frac{n^2+3n}{2}\right)-\left\{\frac{(n-1)^2+3(n-1)}{2}\right\}=n+1$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때, $b_1=\frac{1^2+3\cdot 1}{2}=2$

$b_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$b_n=n+1$

즉 $\log_2 a_n=n+1$이므로

$a_n=2^{n+1}=2^2\cdot 2^{n-1}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$\frac{2^2(2^{10}-1)}{2-1}=4092$

답 ④

1007 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 각각 공차가 -3, 2이고 첫째항을 각각 a, b라 하면

$a_n=a+(n-1)\cdot(-3)=-3n+3+a$

$b_n=b+(n-1)\cdot 2=2n-2+b$

$\therefore 3a_n+2b_n=3(-3n+3+a)+2(2n-2+b)$

$=(3a+2b)+(n-1)\cdot(-5)$

따라서 등차수열 $\{3a_n+2b_n\}$의 공차는 -5이다.

답 ①

1008 $a_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ㄱ. $a_{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다. (참)

ㄴ. $S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore 2-S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{2-S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. (참)

ㄷ. $a_{n+1}-2a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_{n+1}-2a_n\}$은 첫째항이 $-\frac{3}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

1009 매년 5월 1일마다 a만 원씩 저축한다고 하면 5년 후의 원리합계는

$a(1+0.1)+a(1+0.1)^2+a(1+0.1)^3$

$+a(1+0.1)^4+a(1+0.1)^5$

$=\frac{1.1a(1.1^5-1)}{1.1-1}$

$=\frac{1.1a(1.6-1)}{0.1}$

$=6.6a=3300$

$\therefore a=\frac{3300}{6.6}=500$ (만 원)

답 ⑤

1010 곡선 $y=x(x+4)(x-1)$과 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 방정식 $x^3+3x^2-4x=k$의 세 근이므로

$x^3+3x^2-4x-k=0$의 세 근이 α, β, γ이다. …… ㉮

이때 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\alpha=\beta-d$, $\gamma=\beta+d$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\beta-d)+\beta+(\beta+d)=-3$ $\therefore \beta=-1$ …… ㉯

즉 $\beta=-1$이 $x^3+3x^2-4x-k=0$의 근이므로

$-1+3+4-k=0$ $\therefore k=6$ …… ㉰

답 6

단계	채점요소	배점
㉮	곡선과 직선의 교점의 x좌표가 방정식 $x^3+3x^2-4x=k$의 세 근임을 알기	30 %
㉯	근과 계수의 관계를 이용하여 β의 값 구하기	40 %
㉰	k의 값 구하기	30 %

1011 주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{20}=\frac{20(2a+19d)}{2}=120$

$\therefore 2a+19d=12 \quad \cdots\cdots$ ㉠ ……㉮

$S_{30}=\frac{30(2a+29d)}{2}=300$

$\therefore 2a+29d=20 \quad \cdots\cdots$ ㉡ ……㉯

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{8}{5}$, $d=\frac{4}{5}$ ……㉰

$\therefore S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}$

$=10a+45d$

$=10\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)+45\cdot\frac{4}{5}$

$=20$ ……㉱

답 **20**

단계	채점요소	배점
㉮	S_{20}을 이용하여 식 세우기	30 %
㉯	S_{30}을 이용하여 식 세우기	30 %
㉰	주어진 수열의 첫째항 a와 공차 d 구하기	20 %
㉱	S_{10} 구하기	20 %

1012 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=5$에서

$a+ar+ar^2=a(1+r+r^2)=5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a_4+a_5+a_6=30$에서

$ar^3+ar^4+ar^5=ar^3(1+r+r^2)=30 \quad \cdots\cdots$ ㉡ ……㉮

㉡÷㉠을 하면

$r^3=6$ ……㉯

$\therefore \frac{a_4+a_6}{a_1+a_3}=\frac{ar^3+ar^5}{a+ar^2}=\frac{ar^3(1+r^2)}{a(1+r^2)}=r^3=6$ ……㉰

답 **6**

단계	채점요소	배점
㉮	조건에 맞는 식 세우기	40 %
㉯	r^3의 값 구하기	20 %
㉰	$\frac{a_4+a_6}{a_1+a_3}$의 값 구하기	40 %

1013 주어진 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면 첫째항은 $2x$, 공비는 $\frac{1}{2x+1}$이므로 ……㉮

(i) $\frac{1}{2x+1}\neq 1$, 즉 $x\neq 0$일 때,

$S_n=\frac{2x\left\{1-\left(\frac{1}{2x+1}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2x+1}}$

$=(2x+1)\left\{1-\left(\frac{1}{2x+1}\right)^n\right\}$

$=2x+1-\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{n-1}$ ……㉯

(ii) $\frac{1}{2x+1}=1$, 즉 $x=0$일 때,

모든 항이 0이므로 $S_n=0$ ……㉰

$\therefore x\neq 0$일 때 $2x+1-\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{n-1}$, $x=0$일 때 0 ……㉱

답 $x\neq 0$일 때 $2x+1-\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{n-1}$, $x=0$일 때 0

단계	채점요소	배점
㉮	주어진 등비수열의 첫째항과 공비 구하기	20 %
㉯	(공비)$\neq$1일 때 S_n 구하기	30 %
㉰	(공비)=1일 때 S_n 구하기	30 %
㉱	S_n 구하기	20 %

1014 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=30$

$a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+\cdots+a_{3n}$

$=ar^{2n}+ar^{2n+1}+ar^{2n+2}+\cdots+ar^{3n-1}$

$=\frac{ar^{2n}(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdot r^{2n}$

$=30r^{2n}=270$

$r^{2n}=9$

$\therefore (r^n)^2=3^2$

그런데 등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $r^n=3$

$\therefore a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n}$

$=ar^n+ar^{n+1}+ar^{n+2}+\cdots+ar^{2n-1}$

$=\frac{ar^n(1-r^n)}{1-r}$

$=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdot r^n$

$=30\cdot 3$

$=90$

답 **90**

1015 한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이가 9이므로

1회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $\frac{8}{9}\cdot 9$

2회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $\left(\frac{8}{9}\right)^2\cdot 9$

$\vdots$

n회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $\left(\frac{8}{9}\right)^n\cdot 9$

따라서 10회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$\left(\frac{8}{9}\right)^{10}\cdot 9=\frac{8^{10}}{9^9}=\frac{2^{30}}{3^{18}}$이므로

$p=30$, $q=18$

$\therefore p+q=48$

답 **48**

1016 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d_1이라 하자.

조건 ㈎에서 $a_1=1$, $a_{10}=55$이므로

$55=1+9d_1$ $\quad\therefore d_1=6$

$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot 6=6n-5$

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공차를 d_2라 하자.

조건 ㈏에서 $b_2=7$, $b_7=27$이므로

$b+d_2=7$, $b+6d_2=27$

두 식을 연립하여 풀면

$b=3$, $d_2=4$

$\therefore b_n=3+(n-1)\cdot 4=4n-1$

두 집합 A, B의 원소가 모두 1 이상 50 이하의 자연수이므로

$a_n=6n-5\le 50$에서 $n\le\frac{55}{6}$

$b_n=4n-1\le 50$에서 $n\le\frac{51}{4}$

이때 $a_n=b_m$

즉 $6n-5=4m-1$, $3n=2(m+1)$ $\left(n\le\frac{55}{6},\ m\le\frac{51}{4}\right)$

을 만족시키는 자연수 n, m을 순서쌍 (n, m)으로 나타내면

$(2, 2)$, $(4, 5)$, $(6, 8)$, $(8, 11)$

집합 $A\cap B$의 원소의 개수는 순서쌍 (n, m)의 개수와 같으므로

$n(A\cap B)=4$

답 **4**

09 수열의 합

교과서 문제 정/복/하/기

본문 133쪽

1017 $\sum_{k=1}^{5} 2k = 2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+2\cdot5$
$= 2+4+6+8+10$

답 풀이 참조

1018 $\sum_{i=1}^{5} 2^i = 2^1+2^2+2^3+2^4+2^5$
$= 2+4+8+16+32$

답 풀이 참조

1019 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

답 풀이 참조

1020 $1+3+3^2+\cdots+3^9 = \sum_{k=1}^{10} 3^{k-1}$

답 $\sum_{k=1}^{10} 3^{k-1}$

1021 $1+4+7+\cdots+25 = \sum_{k=1}^{9} (3k-2)$

답 $\sum_{k=1}^{9} (3k-2)$

1022 $6+6+6+6+6+6 = \sum_{k=1}^{6} 6$

답 $\sum_{k=1}^{6} 6$

1023 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$

답 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$

1024 $\sum_{k=1}^{10} (2a_k+3b_k) = 2\sum_{k=1}^{10} a_k + 3\sum_{k=1}^{10} b_k$
$= 2\cdot2+3\cdot3 = 13$

답 13

1025 $\sum_{k=1}^{10} (5a_k+2) = 5\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2$
$= 5\cdot2+2\cdot10 = 30$

답 30

1026 $\sum_{k=1}^{10} (4k+2) = 4\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 2$
$= 4\cdot\frac{10\cdot11}{2}+2\cdot10 = 240$

답 240

1027 $\sum_{k=1}^{10} (2k^2-3k+1) = 2\sum_{k=1}^{10} k^2 - 3\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1$
$= 2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6} - 3\cdot\frac{10\cdot11}{2} + 1\cdot10$
$= 770-165+10$
$= 615$

답 615

1028 $\sum_{k=1}^{8} k(k+1)(k-1) = \sum_{k=1}^{8} (k^3-k)$
$= \sum_{k=1}^{8} k^3 - \sum_{k=1}^{8} k$
$= \left(\frac{8\cdot9}{2}\right)^2 - \frac{8\cdot9}{2} = 1260$

답 1260

1029 $1+2+3+\cdots+20 = \sum_{k=1}^{20} k = \frac{20\cdot21}{2} = 210$

답 210

1030 주어진 수열의 일반항 a_n은 $a_n = n^3$
$\therefore$ (주어진 식) $= \sum_{k=1}^{9} k^3 = \left(\frac{9\cdot10}{2}\right)^2 = 45^2 = 2025$

답 2025

1031 주어진 수열의 일반항 a_n은 $a_n = (n+4)^2$이므로
$(n+4)^2 = 15^2$에서 $n+4 = 15$ $\therefore n = 11$
$\therefore$ (주어진 식) $= \sum_{k=1}^{11} (k+4)^2$
$= \sum_{k=1}^{11} (k^2+8k+16)$
$= \sum_{k=1}^{11} k^2 + 8\sum_{k=1}^{11} k + \sum_{k=1}^{11} 16$
$= \frac{11\cdot12\cdot23}{6} + 8\cdot\frac{11\cdot12}{2} + 16\cdot11$
$= 506+528+176$
$= 1210$

답 1210

1032 $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$
$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$
$= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)}$

답 $\frac{n}{2(n+2)}$

1033 $\sum_{k=2}^{20}\frac{1}{(k-1)k}$

$=\sum_{k=2}^{20}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)$

$=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

답 $\frac{19}{20}$

1034 $\sum_{k=1}^{8}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$=(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{8}-\sqrt{9})$

$=1-\sqrt{9}=-2$

답 -2

1035 $\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})$

$=-1+\sqrt{81}=8$

답 8

1036 $\sum_{k=1}^{99}\log\frac{k}{k+1}$

$=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\cdots+\log\frac{99}{100}$

$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}\right)$

$=\log\frac{1}{100}=-2$

답 -2

1037 $S=1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+9\cdot2^8+10\cdot2^9$

$-)\ 2S=\quad 2+2\cdot2^2+\cdots+8\cdot2^8+9\cdot2^9+10\cdot2^{10}$

$-S=1+2+2^2+\cdots+2^8+2^9-10\cdot2^{10}$

$=\frac{2^{10}-1}{2-1}-10\cdot2^{10}$

$=2^{10}-1-10\cdot2^{10}$

$=-9\cdot2^{10}-1$

$\therefore S=9\cdot2^{10}+1$

답 $9\cdot2^{10}+1$

1038 주어진 수열을 군수열로 나타내면

$(1),\ (3,\ 3),\ (5,\ 5,\ 5),\ (7,\ 7,\ 7,\ 7),\ \cdots$

즉 제 n 군에 있는 각 항은 $2n-1$이고, 제 n 군의 항의 개수는 n이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

제 8 군까지의 항의 개수는 $\frac{8\cdot9}{2}=36$이므로 제 40 항은 제 9 군의 4번째 항이다.

따라서 제 40 항은 $2\cdot9-1=17$이다.

답 17

유형 익히기 본문 134~140쪽

1039 $\sum_{k=1}^{20}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}+a_{20}$

$=(\underbrace{a_1+a_2}_{2k\text{ 꼴}})+(a_3+a_4)+\cdots+(\underbrace{a_{19}+a_{20}}_{(2k-1)\text{ 꼴}})$

$=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=5\cdot10^2=500$

답 ②

1040 ① $\underbrace{2+4+6+\cdots+2(n)}_{a_n=2n}+1)=\sum_{k=1}^{n+1}2k$ ($(n+1)$개)

② $\underbrace{1+3+\cdots+15}_{a_n=2n-1}=\sum_{k=1}^{8}(2k-1)$ (8개)

③ $\underbrace{1+2+4+\cdots+2}_{a_n=2^{n-1}}{}^{n}=\sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}$ ($(n+1)$개)

④ $\underbrace{1-1+1-1+1-1}_{a_n=(-1)^{n-1}}=\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k-1}$ (6개)

⑤ 수열 $9,\ 3,\ 1,\ \cdots,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$은 첫째항이 9, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로 일반항은

$a_n=9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=3^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$

$\therefore 9+3+1+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-3}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

1041 $\sum_{k=1}^{2018}a_{k+1}-\sum_{n=2}^{2019}a_{n-1}$

$=(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2019})-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2018})$

$=a_{2019}-a_1=105-5=100$

답 100

1042 $\sum_{k=1}^{20}ka_k=200$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+20a_{20}=200$ ····· ㉠

가

$\sum_{k=1}^{19} ka_{k+1}=100$에서

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+19a_{20}=100$ …… ㉡

…… ㉣

㉠−㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=100$

…… ㉢

$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=100$

…… ㉤

답 **100**

단계	채점요소	배점
㉮	$\sum_{k=1}^{20} ka_k=200$을 Σ를 사용하지 않고 나타내기	30 %
㉯	$\sum_{k=1}^{19} ka_{k+1}=100$을 Σ를 사용하지 않고 나타내기	30 %
㉰	$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$의 값 구하기	20 %
㉱	$\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값 구하기	20 %

1043 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$

$=20$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2-2a_kb_k+b_k^2)$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k^2-2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$

$=8$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $4\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=12$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_kb_k=3$

답 **3**

1044 $\sum_{k=1}^{20}(2a_k+b_k-1)=\sum_{k=1}^{20}2a_k+\sum_{k=1}^{20}b_k-\sum_{k=1}^{20}1$

$=2\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{20}b_k-20$

$=2\cdot5+8-20$

$=-2$

답 ①

1045 $\sum_{j=1}^{n}a_j=n^2$에 $n=30$, $n=20$을 각각 대입하면

$\sum_{j=1}^{30}a_j=900$, $\sum_{j=1}^{20}a_j=400$

$\sum_{j=1}^{n}b_j=6n$에 $n=30$, $n=20$을 각각 대입하면

$\sum_{j=1}^{30}b_j=180$, $\sum_{j=1}^{20}b_j=120$

$\therefore \sum_{j=21}^{30}(2a_j-3b_j)$

$=2\sum_{j=21}^{30}a_j-3\sum_{j=21}^{30}b_j$

$=2\left(\sum_{j=1}^{30}a_j-\sum_{j=1}^{20}a_j\right)-3\left(\sum_{j=1}^{30}b_j-\sum_{j=1}^{20}b_j\right)$

$=2(900-400)-3(180-120)$

$=2\cdot500-3\cdot60=820$

답 ②

1046 $\sum_{k=1}^{10}\frac{5^k+3^k}{4^k}$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{5}{4}\right)^k+\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$=\frac{\frac{5}{4}\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{10}-1\right\}}{\frac{5}{4}-1}+\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{3}{4}}$

$=5\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{10}-1\right\}+3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$

$=5\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{10}-5+3-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

$=5\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{10}-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}-2$

따라서 $a=5$, $b=-3$, $c=-2$이므로

$a+b+c=0$

답 ③

1047 $5+55+555+\cdots+\underbrace{555\cdots5}_{20개}$

$=\frac{5}{9}(9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots9}_{20개})$

$=\frac{5}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+\cdots+(10^{20}-1)\}$

$=\frac{5}{9}\sum_{k=1}^{20}(10^k-1)$

$=\frac{5}{9}\left\{\frac{10(10^{20}-1)}{10-1}-20\right\}$

$=\frac{50\cdot10^{20}-950}{81}$

따라서 $a=50$, $b=950$이므로

$a+b=50+950=1000$

답 ③

1048 주어진 수열의 제 n 항을 a_n이라 하면

$a_n=1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-2-n=2^{10}-11$

$\therefore n=9$

답 **9**

1049 $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2+\sum_{k=1}^{10}(2k)^2$

$=\sum_{k=1}^{10}(8k^2-4k+1)$

$=8\sum_{k=1}^{10}k^2-4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=8\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-4\cdot\frac{10\cdot11}{2}+10$

$=3080-220+10=2870$

답 **2870**

다른풀이 $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2+\sum_{k=1}^{10}(2k)^2$

$=(1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2)+(2^2+4^2+6^2+\cdots+20^2)$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

$=\sum_{k=1}^{20}k^2$

$=\frac{20\cdot21\cdot41}{6}=2870$

1050 $\sum_{k=2}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)-1$

$=2\sum_{k=1}^{n}k-n-1$

$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n-1$

$=n^2-1=80$

$n^2=81$

$\therefore n=9\ (\because n\geq2)$

답 **9**

1051 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=3+2(n-1)=2n+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}(3a_k-1)=\sum_{k=1}^{15}(6k+2)$

$=6\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}2$

$=6\cdot\frac{15\cdot16}{2}+15\cdot2$

$=750$

답 **750**

1052 $\sum_{k=1}^{11}(k-c)(2k-c)$

$=\sum_{k=1}^{11}(2k^2-3ck+c^2)$

$=2\sum_{k=1}^{11}k^2-3c\sum_{k=1}^{11}k+\sum_{k=1}^{11}c^2$

$=2\cdot\frac{11\cdot12\cdot23}{6}-3c\cdot\frac{11\cdot12}{2}+11c^2$

$=11c^2-198c+1012$

$=11(c-9)^2+121$

따라서 $c=9$일 때 최소가 된다.

답 ⑤

1053 $6+7+8+\cdots+n=\sum_{k=6}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{5}k$

$=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{5\cdot6}{2}$

$=\frac{1}{2}(n^2+n)-15=105$

$n^2+n-240=0,\ (n+16)(n-15)=0$

$\therefore n=15\ (\because n$은 자연수)

답 ①

1054 주어진 수열의 제 n 항을 a_n이라 하면

$a_n=n^2(n+1)$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}k^2(k+1)=\sum_{k=1}^{10}(k^3+k^2)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^3+\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2+\frac{10\cdot11\cdot21}{6}$

$=3025+385=3410$

답 **3410**

1055 주어진 수열의 제 n 항을 a_n이라 하면

$a_n=n(21-n)$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{20}k(21-k)=\sum_{k=1}^{20}(21k-k^2)$

$=21\sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}k^2$

$=21\cdot\frac{20\cdot21}{2}-\frac{20\cdot21\cdot41}{6}$

$=4410-2870=1540$

답 ④

1056 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2$

$=2n-1\ (n\geq2)$

$a_1=S_1=1^2=1$

$\therefore a_n=2n-1\ (n\geq1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k^2=\sum_{k=1}^{5}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{5}(4k^2-4k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{5}k^2-4\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1$

$=4\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}-4\cdot\frac{5\cdot6}{2}+5$

$=220-60+5=165$

답 ③

1057 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n}{n+1}$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}$

$=\frac{1}{n(n+1)}\ (n\geq 2)$

$a_1=S_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=\frac{1}{n(n+1)}\ (n\geq 1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}k(k+1)=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+\frac{10\cdot 11}{2}$

$=385+55=440$

답 **440**

1058 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n+1}-2$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)$

$=2^n\ (n\geq 2)$

$a_1=S_1=2^2-2=2$

$\therefore a_n=2^n\ (n\geq 1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_{3k}=\sum_{k=1}^{n}2^{3k}=\frac{2^3(8^n-1)}{8-1}=\frac{8}{7}(8^n-1)$

답 $\frac{8}{7}(8^n-1)$

1059 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$의 평균이 $n+1$이므로

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=n+1$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=n(n+1)$

즉, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n(n+1)$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+1)-(n-1)n$

$=2n\ (n\geq 2)$

$a_1=S_1=1\cdot(1+1)=2$

$\therefore a_n=2n\ (n\geq 1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}ka_k=\sum_{k=1}^{10}2k^2=2\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=770$

답 ①

1060 $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)=\sum_{l=1}^{n}\frac{l(l+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(l^2+l)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=56$

$n(n+1)(n+2)=6\cdot 7\cdot 8$에서 $n=6$

답 **6**

1061 $\sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{k=1}^{5}i^2k\right)=\sum_{i=1}^{10}\left\{i^2\left(\sum_{k=1}^{5}k\right)\right\}$

$=\sum_{i=1}^{10}\left(i^2\cdot\frac{5\cdot 6}{2}\right)=15\sum_{i=1}^{10}i^2$

$=15\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=5775$

답 ④

1062 $\sum_{m=1}^{4}\left[\sum_{l=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{l}(2k-m+1)\right\}\right]$

$=\sum_{m=1}^{4}\left[\sum_{l=1}^{m}\left\{2\sum_{k=1}^{l}k+\sum_{k=1}^{l}(-m+1)\right\}\right]$

$=\sum_{m=1}^{4}\left[\sum_{l=1}^{m}\left\{2\cdot\frac{l(l+1)}{2}+(-m+1)l\right\}\right]$

$=\sum_{m=1}^{4}\left[\sum_{l=1}^{m}\{l^2+(-m+2)l\}\right]$

$=\sum_{m=1}^{4}\left\{\sum_{l=1}^{m}l^2+(-m+2)\sum_{l=1}^{m}l\right\}$

$=\sum_{m=1}^{4}\left\{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(-m+2)\cdot\frac{m(m+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{m=1}^{4}\frac{m(m+1)\{(2m+1)+3(-m+2)\}}{6}$

$=\sum_{m=1}^{4}\frac{m(m+1)(-m+7)}{6}$

$=-\frac{1}{6}\sum_{m=1}^{4}(m^3-6m^2-7m)$

$=-\frac{1}{6}\left(\sum_{m=1}^{4}m^3-6\sum_{m=1}^{4}m^2-7\sum_{m=1}^{4}m\right)$

$=-\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)^2-6\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 9}{6}-7\cdot\frac{4\cdot 5}{2}\right\}$

$=-\frac{1}{6}(100-180-70)=25$

답 **25**

1063 $x^2-7x+10=0$의 두 근이 m, n이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $m+n=7$, $mn=10$

㉮

$\therefore \sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right\}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}i+\sum_{j=1}^{n}j\right)$

$=\sum_{i=1}^{m}\left\{ni+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=n\sum_{i=1}^{m}i+\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{m}1$

$=n\cdot\frac{m(m+1)}{2}+\frac{mn(n+1)}{2}$

㉯

$=\frac{mn(m+n+2)}{2}$

$=\frac{10(7+2)}{2}=45$

㉰

답 **45**

단계	채점요소	배점
㉮	$m+n$, mn의 값 구하기	20 %
㉯	안쪽에 있는 $\sum$부터 차례대로 풀기	50 %
㉰	답 구하기	30 %

1064 주어진 수열의 제 k 항을 a_k라 하면

$a_k=k\{n-(k-1)\}=-k^2+(n+1)k$

따라서 주어진 수열의 합은

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$$
$$=-\sum_{k=1}^{n} k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n} k$$
$$=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

답 ①

1065 주어진 수열의 제 k 항을 a_k라 하면

$a_k=\left(\frac{n+2k}{n}\right)^2=\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2=1+\frac{4k}{n}+\frac{4k^2}{n^2}$

따라서 주어진 수열의 합은

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{4k}{n}+\frac{4k^2}{n^2}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n} 1+\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k+\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$=n+\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{13n^2+12n+2}{3n}$$

답 ②

1066 수열 $1\cdot(2n-1)$, $2\cdot(2n-3)$, $3\cdot(2n-5)$, …, $n\cdot1$의 제 k 항을 a_k라 하면

$a_k=k\{2n-(2k-1)\}=(2n+1)k-2k^2$ ……㉮

$\therefore 1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+3\cdot(2n-5)+\cdots+n\cdot1$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)k-2k^2\}$$
$$=(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=n(n+1)(2n+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{6}\right)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=1$이므로 ……㉯

$a+b+c=4$ ……㉰

답 4

단계	채점요소	배점
㉮	일반항 a_k 구하기	30 %
㉯	a, b, c의 값 구하기	50 %
㉰	$a+b+c$의 값 구하기	20 %

1067 $x^2+4x+3=(x-n)Q(x)+a_n$이라 놓고 양변에 $x=n$을 대입하면

$a_n=n^2+4n+3$

$$\therefore \sum_{n=1}^{7}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{7}\frac{1}{n^2+4n+3}$$
$$=\sum_{n=1}^{7}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{14}{45}$$

답 $\frac{14}{45}$

1068 $S_n=2n^2+3n$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2n^2+3n)-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=4n+1\ (n\geq2)$

$a_1=S_1=2+3=5$

$\therefore a_n=4n+1\ (n\geq1)$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+5}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{25}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}\right)$$
$$=\frac{1}{25}$$

답 $\frac{1}{25}$

1069 $(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(2n+1)$
$=(2n+1-1)(2n+1+1)$
$=4n(n+1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{11}\frac{8}{(g\circ f)(n)}$$
$$=\sum_{n=1}^{11}\frac{8}{4n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{11}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{12}\right)=\frac{11}{6}$$

답 $\frac{11}{6}$

1070 주어진 수열의 제 n 항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2n+1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$
$$=\frac{6}{n(n+1)}=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore (\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{10}a_k=6\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=6\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{60}{11}$$

답 ②

1071 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+4n$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n+3\ (n\geq 2)$
$a_1=S_1=1+4=5$
$\therefore a_n=2n+3\ (n\geq 1)$ ㉮

$$\therefore \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k+5}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2p+3}-\frac{1}{2p+5}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2p+5}\right)=\frac{2}{25}$$

㉯

$\frac{1}{5}-\frac{1}{2p+5}=\frac{4}{25}$, $\frac{1}{2p+5}=\frac{1}{25}$
$2p+5=25$
$\therefore p=10$ ㉰

답 10

단계	채점요소	배점
㉮	일반항 a_n 구하기	40%
㉯	$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$ 간단히 하기	40%
㉰	p의 값 구하기	20%

1072 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})}$$
$$=-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$
따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은
$$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$$
즉 $\sqrt{n+2}=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$이므로
$n+2=8$ $\therefore n=6$

답 6

1073 $a_n=2+(n-1)\cdot 2=2n$이므로
$$\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}}$$
$$=\frac{\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k})(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}$$
$$=\frac{\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}}{2}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{32}-\sqrt{30})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{32}-\sqrt{2})=\frac{1}{2}(4\sqrt{2}-\sqrt{2})=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

답 ①

1074 $\frac{2}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}$
$$=\frac{2(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})}$$
$$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{80}\frac{2}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})$$
$$=(\sqrt{2}-0)+(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{80}-\sqrt{78})+(\sqrt{81}-\sqrt{79})$$
$$=0-1+\sqrt{80}+\sqrt{81}=8+4\sqrt{5}$$

답 $8+4\sqrt{5}$

1075 $l_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$이므로
$$\sum_{n=1}^{120}l_n=\sum_{n=1}^{120}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{121}-\sqrt{120})$$
$$=\sqrt{121}-1=11-1=10$$

답 10

1076 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n\ (n\geq 2)$

$a_1=S_1=1$

$\therefore a_n=n\ (n\geq 1)$

$$\sum_{k=1}^{14}\frac{2}{a_{k+2}\sqrt{a_k}+a_k\sqrt{a_{k+2}}}$$

$$=\sum_{k=1}^{14}\frac{2}{(k+2)\sqrt{k}+k\sqrt{k+2}}$$

$$=2\sum_{k=1}^{14}\frac{(k+2)\sqrt{k}-k\sqrt{k+2}}{(k+2)^2k-k^2(k+2)}$$

$$=2\sum_{k=1}^{14}\frac{(k+2)\sqrt{k}-k\sqrt{k+2}}{2k(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{14}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{13}}-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{14}}-\frac{1}{\sqrt{16}}\right)$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{15}}-\frac{1}{\sqrt{16}}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{15}}{15}-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{15}\sqrt{15}$$

$\therefore p=\frac{3}{4},\ q=\frac{1}{2},\ r=-\frac{1}{15}$

답 $\boldsymbol{p=\frac{3}{4},\ q=\frac{1}{2},\ r=-\frac{1}{15}}$

1077 $a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{20}\log_9 a_n=\sum_{n=1}^{20}\log_9 3^n$$

$$=\sum_{n=1}^{20}n\log_9 3$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20}n$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{20\cdot 21}{2}=105$$

답 **105**

1078 $\sum_{k=1}^{39}\log_3\{\log_{2k+1}(2k+3)\}$

$$=\log_3(\log_3 5)+\log_3(\log_5 7)+\cdots+\log_3(\log_{79}81)$$

$$=\log_3(\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\cdots\cdot\log_{79}81)$$

$$=\log_3\left(\frac{\log 5}{\log 3}\cdot\frac{\log 7}{\log 5}\cdot\cdots\cdot\frac{\log 81}{\log 79}\right)$$

$$=\log_3\left(\frac{\log 81}{\log 3}\right)$$

$$=\log_3(\log_3 81)$$

$$=\log_3 4$$

답 ②

1079 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\log\frac{n(n+1)}{2}=\log\frac{n+2}{n}\ (n\geq 2)$$

$a_1=S_1=\log 3$

$\therefore a_n=\log\frac{n+2}{n}\ (n\geq 1)$

$$\therefore p=\sum_{k=1}^{20}a_{2k}=\sum_{k=1}^{20}\log\frac{2k+2}{2k}=\sum_{k=1}^{20}\log\frac{k+1}{k}$$

$$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{21}{20}$$

$$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{21}{20}\right)$$

$$=\log 21$$

$\therefore 10^p=10^{\log 21}=21$

답 **21**

1080 주어진 수열을 군수열로 나타내면

$(1),\ (3,\ 1),\ (5,\ 3,\ 1),\ (7,\ 5,\ 3,\ 1),\ \cdots$

제 n 군의 항의 개수는 n이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$n=13$일 때, $\frac{13\cdot 14}{2}=91$이므로 제 100 항은 제 14 군의 9번째 항이다.

각 군의 첫째항으로 이루어진 수열 $\{a_n\}$은 1, 3, 5, 7, …이므로

$a_n=2n-1$

$a_{14}=2\cdot 14-1=27$이고, 각 군은 공차가 -2인 등차수열을 이루므로 제 14 군의 9번째 항은

$27+(9-1)\cdot(-2)=11$

답 ②

1081 주어진 수열을 군수열로 나타내면

$(1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 4,\ 4),\ (5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5),\ \cdots$

제 n 군의 항의 개수는 n이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수 a_n은

$a_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

제 n 군의 각 항은 n이므로 12는 제 12 군에 속한다.

따라서 12가 마지막으로 나오는 항은 제 12 군의 12번째 항이므로

$a_{12}=\frac{12\cdot 13}{2}=78$

$\therefore m=78$

답 **78**

1082 제 n 군의 항의 개수는 n이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

$n=31$일 때, $\frac{31\cdot 32}{2}=496$이므로 500은 제 32 군의 수이다.

$\therefore m=32$ ····· ㉮

각 군은 공차가 1인 등차수열을 이루므로 제 32 군은

$(497, 498, 499, 500, \cdots)$

$\therefore l=4$ ····· ㉯

$\therefore m+l=32+4=36$ ····· ㉰

답 **36**

단계	채점요소	배점
㉮	m의 값 구하기	50 %
㉯	l의 값 구하기	40 %
㉰	$m+l$의 값 구하기	10 %

1083 제 n 군의 항의 개수는 $2n-1$이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n} 1=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

$10^2=100$이므로 제 100 항은 제 10 군의 마지막 항이다.

제 n 군의 합은

$\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2$

따라서 첫째항부터 제 100 항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{10} k^2=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=385$

답 ②

1084 주어진 수열을 분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \cdots$

제 n 군의 모든 항의 분모는 n이므로 $\frac{8}{14}$은 제 14 군의 8번째 항이다.

제 n 군의 항의 개수는 n이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

$n=13$일 때, $\frac{13\cdot 14}{2}=91$, 즉 제 1 군부터 제 13 군까지의 항의 개수는 91이므로 제 14 군의 8번째 항은 $91+8=99$에서 제 99 항이다.

따라서 $\frac{8}{14}$은 제 99 항이다.

답 ④

1085 주어진 수열을 분자, 분모의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면

$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right), \cdots$

제 n 군의 항의 개수는 n이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

$n=11$일 때, $\frac{11\cdot 12}{2}=66$이므로 제 70 항은 제 12 군의 4번째 항이다.

이때 $\frac{4}{p}$의 꼴이라 하면 제 12 군의 각 항의 분자, 분모의 합은

$12+1=13$이므로 $p+4=13$

$\therefore p=9$

따라서 제 70 항은 $\frac{4}{9}$이다.

답 $\frac{4}{9}$

1086 주어진 수열을 분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}\right), \cdots$

제 n 군의 모든 항의 분모는 $(n+1)$이므로 $\frac{11}{14}$은 제 13 군의 수이고 제 13 군은 $\frac{13}{14}, \frac{12}{14}, \frac{11}{14}, \cdots$이므로 $\frac{11}{14}$은 제 13 군의 3번째 항이다.

제 n 군의 항의 개수는 n이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

$n=12$일 때, $\frac{12\cdot 13}{2}=78$이므로 제 13 군의 3번째 항인 $\frac{11}{14}$은 81번째 항이다.

답 ④

1087 주어진 수열을 분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots$

제 n 군의 항의 개수가 2^{n-1}이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$1+2+4+\cdots+2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$

$n=5$일 때, $2^5-1=31$이므로 제 50 항은 제 6 군의 19번째 항이다.

따라서 제 n 군의 m번째 항은 $\frac{2m-1}{2^n}$이므로 제 6 군의 19번째 항은 $\frac{2\cdot 19-1}{2^6}=\frac{37}{64}$

따라서 $a=64$, $b=37$이므로

$a+b=101$

답 **101**

유형 up

본문 141쪽

1088 $S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$

$-)\underline{xS=\quad x+2x^2+3x^3+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n}$

$(1-x)S=1+\ x+\ x^2+\ x^3+\cdots+\quad x^{n-1}-nx^n$

$=\dfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n$

$=\dfrac{1-x^n-n(1-x)x^n}{1-x}$

$\therefore\ (1-x)^2S=1-x^n-n(1-x)x^n$

$=1-(1+n)x^n+nx^{n+1}$

답 ⑤

1089 주어진 식을 S로 놓으면

$S=1\cdot2+2\cdot4+3\cdot8+4\cdot16+\cdots+10\cdot2^{10}$

$-)\underline{2S=\quad 1\cdot4+2\cdot8+3\cdot16+\cdots+9\cdot2^{10}+10\cdot2^{11}}$

$-S=\ 2+\ 4+\ 8+\ 16+\cdots+\ 2^{10}-10\cdot2^{11}$

$=\dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1}-10\cdot2^{11}=2^{11}-2-10\cdot2^{11}$

$=-9\cdot2^{11}-2$

$\therefore\ S=9\cdot2^{11}+2$

답 ③

1090 $S=2\cdot\dfrac{1}{3}+4\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+6\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots+20\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}$

$-)\underline{\dfrac{1}{3}S=\quad 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots+18\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}+20\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}}$

$\dfrac{2}{3}S=2\cdot\dfrac{1}{3}+2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots+\ 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}-20\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}$

$=2\left\{\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}\right\}-20\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}$

$=2\cdot\dfrac{\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}-20\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}$

$=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}-20\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}$

$=1-3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}-20\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}$

$=1-23\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}$

$\therefore\ a=23$

답 **23**

1091 위에서 2번째 줄 : $\underbrace{1,}_{2}\ \underbrace{3,}_{2}\ \underbrace{5,}_{2}\ 7,\ \cdots$

위에서 3번째 줄 : $\underbrace{1,}_{3}\ \underbrace{4,}_{3}\ \underbrace{7,}_{3}\ 10,\ \cdots$

위에서 4번째 줄 : $\underbrace{1,}_{4}\ \underbrace{5,}_{4}\ \underbrace{9,}_{4}\ 13,\ \cdots$

즉 위에서 n번째 줄은 첫째항이 1이고 공차가 n인 등차수열이다.
따라서 위에서 50번째 줄은 첫째항이 1이고 공차가 50인 등차수열이고, 구하는 수는 제 30 항이므로

$1+(30-1)\cdot50=1451$

답 **1451**

1092 주어진 수열을 제 1 행부터 일렬로 나열하면

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, …

이므로 k번째의 수는 $2k$이다.

제 1 행부터 제 8 행까지의 항의 개수는

$1+2+3+\cdots+8=\dfrac{8\cdot9}{2}=36$

따라서 제 9 행의 4번째의 수까지의 항의 개수는 $36+4=40$

이므로 구하는 수는 $40\cdot2=80$이다.

답 **80**

1093 주어진 수열을 두 수의 곱이 같은 순서쌍끼리 군으로 묶으면

$\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\},\ \{(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)\},$

$\{(1,\ 8),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (8,\ 1)\},\ \cdots$

제 n 군의 순서쌍의 두 수의 곱이 2^n이고, 항의 개수는 $n+1$이다.

따라서 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)=\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{n(n+3)}{2}$

$n=12$일 때, $\dfrac{12\cdot15}{2}=90$이므로 제 100 항은 제 13 군의 10번째 항이다.

이때 제 n 군의 k번째 항은 $(2^{k-1},\ 2^{n-k+1})$이므로 제 13 군의 10번째 항은 $(2^9,\ 2^4)$이다.

따라서 $a=2^9$, $b=2^4$이므로

$a-b=2^9-2^4=496$

답 **496**

시험에 꼭 나오는 문제

본문 142~145쪽

1094 $\displaystyle\sum_{k=5}^{8}a_k=S_8-S_4=(2^8+8^2)-(2^4+4^2)$

$=320-32=288$

답 ③

1095 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(k^2+k)-\sum_{k=3}^{100}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{2}(k^2+k)$

$=(1^2+1)+(2^2+2)=8$

답 **8**

1096 $\sum_{k=1}^{5} k=1+2+3+4+5$

$\sum_{k=2}^{5} k=\quad 2+3+4+5$

$\sum_{k=3}^{5} k=\quad\quad 3+4+5$

$\sum_{k=4}^{5} k=\quad\quad\quad 4+5$

$+)\ \sum_{k=5}^{5} k=\quad\quad\quad\quad 5$

$1+2\cdot 2+3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5=\sum_{k=1}^{5} k^2$

답 ②

1097 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{10}$ 중 0의 개수를 a, 1의 개수를 b, 2의 개수를 c라 하면 $a+b+c=10$

$\sum_{k=1}^{10} x_k=0\cdot a+1\cdot b+2\cdot c=8$

$\therefore\ b+2c=8 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{10} x_k^2=0^2\cdot a+1^2\cdot b+2^2\cdot c=12$

$\therefore\ b+4c=12 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡−㉠을 하면 $2c=4$

$\therefore\ a=4,\ b=4,\ c=2$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} |x_k-1|=|-1|\cdot 4+|0|\cdot 4+|1|\cdot 2=6$

답 ③

1098 $\sum_{k=1}^{n} (a_k^2+b_k^2)=\sum_{k=1}^{n} \{(a_k+b_k)^2-2a_kb_k\}$

$=\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^2-2\sum_{k=1}^{n} a_kb_k$

$=30-2\cdot 6=18$

답 ①

1099 $\sum_{k=11}^{20} (2a_k+b_k)=2\sum_{k=11}^{20} a_k+\sum_{k=11}^{20} b_k$

$=2\left(\sum_{k=1}^{20} a_k-\sum_{k=1}^{10} a_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{20} b_k-\sum_{k=1}^{10} b_k\right)$

$=2(55-35)+(40-25)$

$=40+15$

$=55$

답 ④

1100 $\sum_{j=0}^{n-1} (j+3)=3+\sum_{j=1}^{n} (j+3)-(n+3)$

$=\sum_{k=1}^{n} (k+3)-n=\sum_{k=1}^{n} (k+3)-\sum_{k=1}^{n} 1$

$=\sum_{k=1}^{n} (k+2)$

또 $\sum_{i=1}^{n} (2i+6)=\sum_{k=1}^{n} (2k+6)$이므로

$\sum_{k=1}^{n} (5k+1)+\sum_{j=0}^{n-1} (j+3)-\sum_{i=1}^{n} (2i+6)$

$=\sum_{k=1}^{n} (5k+1)+\sum_{k=1}^{n} (k+2)-\sum_{k=1}^{n} (2k+6)$

$=\sum_{k=1}^{n} \{(5k+1)+(k+2)-(2k+6)\}$

$=\sum_{k=1}^{n} (4k-3)$

답 ①

1101 주어진 수열의 제 n 항을 a_n이라 하면

$a_n=1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}$

$=\frac{1\cdot(10^n-1)}{10-1}=\frac{10^n-1}{9}$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} \frac{10^k-1}{9}=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} (10^k-1)$

$=\frac{1}{9}\left\{\frac{10\cdot(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$

$=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$

답 ②

1102 $\sum_{k=1}^{5} (ak+1)=a\sum_{k=1}^{5} k+\sum_{k=1}^{5} 1=a\cdot\frac{5\cdot 6}{2}+5$

$=15a+5=65$

$15a=60 \quad \therefore\ a=4$

답 **4**

1103 짝수의 제곱은 짝수이고, 홀수의 제곱은 홀수이므로

$f(n^2)=\begin{cases} n^2 & (n\text{이 짝수}) \\ 1 & (n\text{이 홀수}) \end{cases}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{20} f(k^2)$

$=1+2^2+1+4^2+\cdots+1+20^2$

$=(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{10\text{개}})+(2^2+4^2+\cdots+20^2)$

$=10+\sum_{k=1}^{10} (2k)^2=10+4\sum_{k=1}^{10} k^2$

$=10+4\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}$

$=10+1540=1550$

답 **1550**

1104 곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=nx+2$가 만나는 두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(\alpha_n, \alpha_n^2+\alpha_n)$, $B(\beta_n, \beta_n^2+\beta_n)$이라 하면

$a_n=\frac{\alpha_n^2+\alpha_n-0}{\alpha_n-0}=\alpha_n+1$

$b_n=\frac{\beta_n^2+\beta_n-0}{\beta_n-0}=\beta_n+1$

$\therefore\ a_n+b_n=\alpha_n+\beta_n+2$

x에 대한 이차방정식 $x^2+x=nx+2$, 즉 $x^2-(n-1)x-2=0$의 두 실근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=n-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n+\beta_n+2)=\sum_{n=1}^{10}(n+1)$

$=\frac{10\cdot 11}{2}+10=65$

답 65

1105 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=a+5d=0$ …… ㉠

$a_2=a+d=8$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $4d=-8$

$\therefore d=-2,\ a=10$

$a_n=10-2(n-1)=-2n+12\geq 0$에서 $n\leq 6$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$

$=\sum_{k=1}^{n}|-2k+12|$

$=\sum_{k=1}^{6}(-2k+12)+\sum_{k=7}^{n}(2k-12)$

$=\frac{6(10+0)}{2}+\frac{(n-6)(2+2n-12)}{2}$

$=30+(n-6)(n-5)\geq 120$

즉 $(n-5)(n-6)\geq 90$

$n^2-11n-60\geq 0$, $(n+4)(n-15)\geq 0$

$\therefore n\geq 15$ ($\because n$은 자연수)

따라서 S_n의 값이 처음으로 120 이상이 되는 n의 값은 15이다.

답 15

1106 $a_1=1$

$a_2=2+2\cdot 2$

$a_3=3+2\cdot 3+3\cdot 3$

$a_4=4+2\cdot 4+3\cdot 4+4\cdot 4$

⋮

이므로

$a_n=n+2n+3n+\cdots+n^2$

$=\sum_{k=1}^{n}kn=n\sum_{k=1}^{n}k$

$=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}(n^3+n^2)$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{2}(k^3+k^2)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{8}k^3+\sum_{k=1}^{8}k^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8\cdot 9}{2}\right)^2+\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}\right\}$

$=\frac{1}{2}(1296+204)=750$

답 750

1107 $\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n}2^{k+n-1}\right)=\sum_{n=1}^{5}\left(2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}2^k\right)$

$=\sum_{n=1}^{5}\left\{2^{n-1}\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{5}2^{n-1}(2^{n+1}-2)=\sum_{n=1}^{5}(2^{2n}-2^n)$

$=\sum_{n=1}^{5}(4^n-2^n)$

$=\frac{4(4^5-1)}{4-1}-\frac{2(2^5-1)}{2-1}$

$=\frac{4(1024-1)}{4-1}-\frac{2(32-1)}{2-1}$

$=1364-62$

$=1302$

답 1302

1108 (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{28}-\frac{1}{31}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{30}{31}=\frac{10}{31}$

답 ①

1109 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}$

따라서 $1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\leq\frac{1}{100}$에서

$\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{100}$, $n+1\geq 100$

$\therefore n\geq 99$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 99이다.

답 99

1110 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

$\therefore \sum_{k=1}^{11}\frac{2k+1}{a_k}=\sum_{k=1}^{11}\left\{(2k+1)\cdot\frac{12}{k(k+1)(2k+1)}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{11}\frac{12}{k(k+1)}=12\sum_{k=1}^{11}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=12\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=12\left(1-\frac{1}{12}\right)=11$$

답 ③

1111 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha_n+\beta_n=-4$, $\alpha_n\beta_n=-(2n-1)(2n+1)$
$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=4\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$$

답 ④

1112 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2})$$
$$=(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})$$
$$=\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$$
즉 $\sqrt{n+3}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}$이므로
$\sqrt{n+3}=4\sqrt{3}$, $n+3=48$
$\therefore n=45$

답 **45**

1113 네 점 A_n, B_n, C_n, D_n의 좌표를 각각 구하면
$A_n(-n, \sqrt{2n})$, $B_n(-n+1, \sqrt{2n-2})$,
$C_n(-n, 0)$, $D_n(-n+1, 0)$
이때 사각형 $A_nC_nD_nB_n$은 사다리꼴이므로 넓이는
$$S_n=\frac{1}{2}(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-2})$$
$$\therefore \sum_{n=2}^{50}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=2}^{50}\frac{2}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-2}}$$
$$=\sum_{n=2}^{50}\frac{2(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-2})}{(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-2})(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-2})}$$
$$=\sum_{n=2}^{50}(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-2})$$
$$=(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{98})$$
$$=-\sqrt{2}+\sqrt{100}=10-\sqrt{2}$$

답 $10-\sqrt{2}$

1114 $\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{2}{k}\right)$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k+2}{k}\right)$$
$$=\log\frac{3}{1}+\log\frac{4}{2}+\log\frac{5}{3}+\cdots+\log\frac{n+1}{n-1}+\log\frac{n+2}{n}$$
$$=\log\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}\right)$$
$$=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}=1$$
즉 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}=10$
$n^2+3n-18=0$, $(n-3)(n+6)=0$
이때 n은 자연수이므로 $n=3$

답 **3**

1115 주어진 수열을 군수열로 나타내면
(1), (10, 11), (100, 101, 110, 111),
…, (100…0, 100…1, …, 111…1), …
즉 제 n 군은 0과 1로 이루어진 n자리의 수이다.
제 n 군의 항의 개수는 2^{n-1}이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$
$n=5$일 때, $2^5-1=31$이므로 제 33 항은 제 6 군의 2번째 항이다.
이때 제 6 군은 (100000, 100001, …)이므로 제 33 항은 100001이다.

답 ④

1116 주어진 수열을 군수열로 나타내면
$\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$, …
제 n 군의 항의 개수는 $(n+1)$이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는
$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)=\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{n^2+3n}{2}$$
제 1 군의 마지막 항은 $\frac{1}{2}$, 제 2 군의 마지막 항은 $\frac{1}{4}$, 제 3 군의 마지막 항은 $\frac{1}{8}$, …이므로 제 n 군의 마지막 항은 $\frac{1}{2^n}$이다.
$\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}$은 제 6 군의 마지막 항이고 제 1 군부터 제 6 군까지의 항의 개수는 $\frac{6^2+3\cdot6}{2}=27$
따라서 $\frac{1}{64}$은 제 27 항에서 처음으로 나타나므로 구하는 k의 최솟값은 27이다.

답 **27**

1117 $S=\sum_{n=1}^{21}\frac{n}{2^n}$이라 하면

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{21}{2^{21}}$$

$$-)\ \frac{1}{2}S=\qquad\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{20}{2^{21}}+\frac{21}{2^{22}}$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{21}}-\frac{21}{2^{22}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{21}{2^{22}}$$

$$=\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right\}-\frac{21}{2^{22}}$$

$$=1-\frac{2}{2^{22}}-\frac{21}{2^{22}}$$

$$=\frac{2^{22}-23}{2^{22}}$$

$\therefore S=\frac{2^{22}-23}{2^{21}}$

이때 분모 2^{21}의 약수는 1을 제외하면 모두 2의 거듭제곱으로 짝수인데 분자 $2^{22}-23$은 홀수이므로 분모와 분자는 서로소이다.

$\therefore a=2^{22}-23,\ b=2^{21}$

$\therefore 2b-a=2^{22}-(2^{22}-23)=23$

답 **23**

1118 주어진 수열의 제 n 항을 a_n이라 하면

$a_n=(2n-1)(2n+1)=4n^2-1$ ㉮

$\therefore$ (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-1)$

$$=4\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}1$$

$$=4\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-10$$

$$=1540-10=1530$$ ㉯

답 **1530**

단계	채점요소	배점
㉮	일반항 a_n 구하기	40 %
㉯	주어진 식의 값 구하기	60 %

1119 $\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m}(2k+1)\right\}$

$=\sum_{m=1}^{n}\left(2\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m}1\right)$

$=\sum_{m=1}^{n}\left\{2\cdot\frac{m(m+1)}{2}+m\right\}$

$=\sum_{m=1}^{n}(m^2+2m)$ ㉮

$=\sum_{m=1}^{n}m^2+2\sum_{m=1}^{n}m$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}=85$ ㉯

$2n^3+9n^2+7n-510=0$

$(n-5)(2n^2+19n+102)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=5$ ㉰

답 **5**

단계	채점요소	배점
㉮	$\sum_{k=1}^{m}(2k+1)$ 간단히 하기	40 %
㉯	$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m}(2k+1)\right\}$ 간단히 하기	40 %
㉰	n의 값 구하기	20 %

1120 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+3n$이라 하면

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=2n+2\ (n\geq2)$

$a_1=S_1=1^2+3=4$

$\therefore a_n=2n+2\ (n\geq1)$ ㉮

$\therefore \sum_{k=1}^{16}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$

$$=\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$$

$$=\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{4(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{16}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{18}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{18}=\frac{1}{9}$$ ㉯

답 $\frac{1}{9}$

단계	채점요소	배점
㉮	일반항 a_n 구하기	50 %
㉯	$\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값 구하기	50 %

1121 주어진 수열의 제 n 항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$ ㉮

∴ (주어진 식)
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$ ㉯

즉 $\frac{n}{2n+1}=\frac{20}{41}$이므로

$41n=40n+20$ ∴ $n=20$ ㉰

답 **20**

단계	채점요소	배점
㉮	일반항 a_n 구하기	40%
㉯	$\sum_{k=1}^{n}a_k$ 구하기	40%
㉰	n의 값 구하기	20%

1122 주어진 수열의 제 n 항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

∴ (주어진 식)
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{5}{11}-\frac{5}{24}=\frac{65}{264}$$

따라서 $m=264$, $n=65$이므로

$m+n=329$

답 **329**

1123 1의 오른쪽 아래 대각선 방향의 수를 나열하면

1, 9, 25, …

즉 1^2, 3^2, 5^2, …, $(2k-1)^2$이고, $(2k-1)^2$ 바로 위에 오는 수는

$\{2(k-1)-1\}^2+1=(2k-3)^2+1$ $(k\geq 2)$

$169=13^2$이므로

$2k-1=13$ ∴ $k=7$

따라서 169 바로 위에 오는 수는

$(2k-3)^2+1=(2\cdot 7-3)^2+1=122$

답 **122**

1124 집합 A_{k+1}의 가장 작은 원소는 집합 A_k의 가장 작은 원소보다 크고 $n(A_k-A_{k+1})=3$이므로 집합 A_k의 가장 작은 원소 m_k는 첫째항이 3이고 공차가 $2\times 3=6$인 등차수열의 일반항과 같으므로

$m_k=3+6(k-1)=6k-3$

집합 A_k의 원소의 개수는 $(2k+3)$이므로 집합 A_k의 가장 큰 원소 M_k는

$M_k=m_k+2\{(2k+3)-1\}$
$=(6k-3)+2(2k+2)=10k+1$

∴ $\sum_{k=1}^{10}(m_k+M_k)=\sum_{k=1}^{10}\{(6k-3)+(10k+1)\}$
$=\sum_{k=1}^{10}(16k-2)$
$=16\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}2$
$=16\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-2\cdot 10$
$=880-20$
$=860$

답 **860**

10 수학적 귀납법

교과서 문제 정/복/하/기

본문 147쪽

1125 $a_{n+1}=2a_n+n$에서
$a_2=2a_1+1=2\cdot1+1=3$
$a_3=2a_2+2=2\cdot3+2=8$
$a_4=2a_3+3=2\cdot8+3=19$

답 **19**

1126 $a_{n+1}=na_n$에서
$a_2=a_1=-1$
$a_3=2a_2=2\cdot(-1)=-2$
$a_4=3a_3=3\cdot(-2)=-6$

답 **-6**

1127 $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$에서
$a_3=2a_2+a_1=2\cdot3+1=7$
$a_4=2a_3+a_2=2\cdot7+3=17$

답 **17**

1128 $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+2$에서
$a_2=\frac{1}{a_1}+2=1+2=3$
$a_3=\frac{1}{a_2}+2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$
$a_4=\frac{1}{a_3}+2=\frac{3}{7}+2=\frac{17}{7}$

답 **$\frac{17}{7}$**

1129 첫째항 $a_1=2$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2-a_1=5-2=3$
$a_3-a_2=8-5=3$
$a_4-a_3=11-8=3$
⋮
$a_{n+1}-a_n=3\ (n\geq1)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 **$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$**

1130 첫째항 $a_1=10$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2-a_1=6-10=-4$
$a_3-a_2=2-6=-4$
$a_4-a_3=-2-2=-4$
⋮
$a_{n+1}-a_n=-4\ (n\geq1)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=10,\ a_{n+1}=a_n-4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 **$a_1=10,\ a_{n+1}=a_n-4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$**

1131 첫째항 $a_1=1$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2\div a_1=2\div1=2$
$a_3\div a_2=4\div2=2$
$a_4\div a_3=8\div4=2$
⋮
$a_{n+1}\div a_n=2\ (n\geq1)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 **$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$**

1132 첫째항 $a_1=9$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2\div a_1=(-3)\div9=-\frac{1}{3}$
$a_3\div a_2=1\div(-3)=-\frac{1}{3}$
$a_4\div a_3=\left(-\frac{1}{3}\right)\div1=-\frac{1}{3}$
⋮
$a_{n+1}\div a_n=-\frac{1}{3}\ (n\geq1)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=9,\ a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

답 **$a_1=9,\ a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$**

1133 $a_{n+1}-a_n=-3$에서 주어진 수열은 공차가 -3인 등차수열이다. 이때 첫째항이 3이므로
$a_n=3+(n-1)\cdot(-3)=-3n+6$

답 **$a_n=-3n+6$**

1134 $a_{n+1}\div a_n=2$에서 주어진 수열은 공비가 2인 등비수열이다. 이때 첫째항이 3이므로
$a_n=3\cdot2^{n-1}$

답 **$a_n=3\cdot2^{n-1}$**

1135 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고
$a_1=3,\ a_2-a_1=2-3=-1$
이므로 첫째항이 3, 공차가 -1이다.

$\therefore a_n=3+(n-1)\cdot(-1)=-n+4$

답 $a_n=-n+4$

1136 ${a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고
$a_1=1,\ a_2\div a_1=2\div 1=2$
이므로 첫째항이 1, 공비가 2이다.
$\therefore a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

답 $a_n=2^{n-1}$

1137 $a_{n+1}=a_n+4n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2=a_1+4\cdot 1$
$a_3=a_2+4\cdot 2$
$a_4=a_3+4\cdot 3$
⋮
$+)\ a_{10}=a_9+4\cdot 9$
$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}4k=1+4\cdot\frac{9\cdot 10}{2}=181$

답 181

1138 $a_{n+1}-a_n=2n+1$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2-a_1=2\cdot 1+1$
$a_3-a_2=2\cdot 2+1$
$a_4-a_3=2\cdot 3+1$
⋮
$+)\ a_{10}-a_9=2\cdot 9+1$
$a_{10}-a_1=\sum_{k=1}^{9}(2k+1)$
$\therefore a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}(2k+1)=3+2\cdot\frac{9\cdot 10}{2}+9=102$

답 102

1139 $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1$
$a_3=\frac{2}{3}a_2$
$a_4=\frac{3}{4}a_3$
⋮
$\times)\ a_{10}=\frac{9}{10}a_9$
$a_{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{9}{10}a_1=\frac{1}{10}\cdot 2=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

1140 $a_{n+1}\div a_n=2^n$, 즉 $a_{n+1}=2^n a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2=2^1 a_1$
$a_3=2^2 a_2$
$a_4=2^3 a_3$
⋮
$\times)\ a_{10}=2^9 a_9$
$a_{10}=2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\cdots\cdot 2^9\cdot a_1$
$=2^{1+2+3+\cdots+9}$
$=2^{\frac{9\cdot 10}{2}}=2^{45}$

답 2^{45}

1141 $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

위의 식의 양변에 $\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$을 더하면

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$
$=\frac{k}{k+1}+\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$
$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$
$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$
$=\boxed{\frac{k+1}{k+2}}$

답 (가) $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (나) $\frac{k+1}{k+2}$

유형 익히기 본문 148~152쪽

1142 $a_{n+1}=a_n+2$에서 $a_{n+1}-a_n=2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이다. 이때 첫째항이 2이므로
$a_n=2+(n-1)\cdot 2=2n$
$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$
$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k\cdot 2(k+1)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$
$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$
$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$
$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$
$=\frac{n}{4(n+1)}$

답 ④

1143 $a_{n+1}+3=a_n$에서 $a_{n+1}-a_n=-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이다. 이때 첫째항이 100이므로

$a_n=100+(n-1)\cdot(-3)=-3n+103$

$a_k=13$에서 $-3k+103=13$

$3k=90$ $\therefore k=30$

답 **30**

1144 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 90, 공차가 $a_2-a_1=-4$인 등차수열이므로

$a_n=90+(n-1)\cdot(-4)=-4n+94$

$a_k<0$에서 $-4k+94<0$

$\therefore k>\frac{94}{4}=23.5$

따라서 $a_k<0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 24이다.

답 **24**

1145 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{4}$, 공차가 $\frac{1}{4}$인 등차수열이므로

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{4}+(n-1)\cdot\frac{1}{4}=\frac{n}{4}$

따라서 $a_n=\frac{4}{n}$이므로 $a_{20}=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

1146 $a_{n+1}=3a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다. 이때 첫째항이 1이므로

$a_n=3^{n-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{5} a_k=\frac{1\cdot(3^5-1)}{3-1}=121$

답 ②

1147 ${a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. 이때 공비를 r라 하면

$\frac{a_{11}}{a_1}+\frac{a_{13}}{a_3}+\frac{a_{15}}{a_5}+\frac{a_{17}}{a_7}=12$에서

$r^{10}+r^{10}+r^{10}+r^{10}=12$, $4r^{10}=12$

$\therefore r^{10}=3$

$\therefore \frac{a_{30}}{a_{10}}=r^{20}=(r^{10})^2=3^2=9$

답 ④

1148 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. 이때 첫째항을 a_1, 공비를 r라 하면

$S_3=\frac{a_1(r^3-1)}{r-1}=78$ ····· ㉠

$S_6=\frac{a_1(r^6-1)}{r-1}=\frac{a_1(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=2184$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{S_6}{S_3}=r^3+1=\frac{2184}{78}=28$

$r^3=27$ $\therefore r=3$ ····· ㉮

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$\frac{a_1(27-1)}{3-1}=78$ $\therefore a_1=6$ ····· ㉯

$\therefore S_8=\frac{6(3^8-1)}{3-1}=3(3^8-1)=19680$ ····· ㉰

답 **19680**

단계	채점요소	배점
㉮	공비 구하기	50 %
㉯	첫째항 구하기	20 %
㉰	S_8 구하기	30 %

1149 $a_{n+1}=a_n+4n-3$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2=a_1+4\cdot1-3$

$a_3=a_2+4\cdot2-3$

$a_4=a_3+4\cdot3-3$

⋮

$+)\ a_n=a_{n-1}+4(n-1)-3$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4k-3(n-1)$

$=-3+4\cdot\frac{n(n-1)}{2}-3(n-1)$

$=2n^2-5n$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-5k)=2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-5\cdot\frac{10\cdot11}{2}=495$

답 ⑤

1150 $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2=a_1+\sqrt{2}-1$

$a_3=a_2+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$a_4=a_3+\sqrt{4}-\sqrt{3}$

⋮

$+)\ a_n=a_{n-1}+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

$a_n=a_1+\sqrt{n}-1=2+\sqrt{n}-1=\sqrt{n}+1$

$a_k=\sqrt{k}+1=13$에서 $\sqrt{k}=12$

$\therefore k=144$

답 **144**

1151 $a_{n+1}=a_n+f(n)$에서 $f(n)=a_{n+1}-a_n$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$$
$$=a_{n+1}-a_1$$
$$=a_{n+1}-1$$

이때 $\sum_{k=1}^{n} f(k)=n^2-1$이므로

$n^2-1=a_{n+1}-1$ $\therefore a_{n+1}=n^2$

$\therefore a_n=(n-1)^2\ (n=2, 3, 4, \cdots)$

$\therefore a_{11}=10^2=100$

답 **100**

1152 $(a_n+a_{n+1})^2=4a_na_{n+1}+4^n$에서

$(a_n+a_{n+1})^2-4a_na_{n+1}=4^n$

$\therefore (a_n-a_{n+1})^2=4^n$

이때 $a_{n+1}>a_n$이므로

$a_{n+1}-a_n=2^n$

n에 1, 2, 3, $\cdots$, 7을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2-a_1=2^1$
$a_3-a_2=2^2$
$a_4-a_3=2^3$
$\vdots$
$+)\ a_8-a_7=2^7$

$a_8-a_1=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^7$
$=\frac{2\cdot(2^7-1)}{2-1}=2^8-2=254$

$\therefore a_8=254+a_1=254+1=255$

답 **255**

1153 $a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 29를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2=\frac{3}{1}a_1$
$a_3=\frac{4}{2}a_2$
$a_4=\frac{5}{3}a_3$
$\vdots$
$a_{29}=\frac{30}{28}a_{28}$
$\times)\ a_{30}=\frac{31}{29}a_{29}$

$a_{30}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{30}{28}\cdot\frac{31}{29}\cdot a_1$
$=\frac{30\cdot31}{1\cdot2}\cdot1$
$=465$

답 ④

1154 $a_{n+1}=5^na_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2=5^1a_1$
$a_3=5^2a_2$
$a_4=5^3a_3$
$\vdots$
$\times)\ a_n=5^{n-1}a_{n-1}$

$a_n=5^1\cdot5^2\cdot5^3\cdot\cdots\cdot5^{n-1}\cdot a_1$
$=5^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\cdot1$
$=5^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$a_k=5^{66}$에서 $5^{\frac{(k-1)k}{2}}=5^{66}$

$\frac{(k-1)k}{2}=66$이므로

$(k-1)k=132$, $k^2-k-132=0$

$(k-12)(k+11)=0$ $\therefore k=12$ 또는 $k=-11$

그런데 k는 자연수이므로 $k=12$

답 ③

1155 $\sqrt{n+2}\,a_{n+1}=\sqrt{n+1}\,a_n$에서

$a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}a_n$이므로 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a_1$
$a_3=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}a_2$
$a_4=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}a_3$
$\vdots$
$\times)\ a_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}a_{n-1}$

$a_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\cdot\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}a_1$
$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}\cdot1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}(a_ka_{k+1})^2$
$=\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+2}}\right)^2$
$=4\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
$=4\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$
$=4\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{17}\right)\right\}$
$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{17}\right)$
$=4\cdot\frac{15}{34}=\frac{30}{17}$

답 $\frac{30}{17}$

1156 $S_{n+1}=2S_n+3$의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하여 두 식을 빼면

$$\begin{array}{rl} & S_{n+1}=2S_n+3 \\ -) & S_n \;=2S_{n-1}+3\ (n\geq 2) \\ \hline & a_{n+1}=2S_n-2S_{n-1}=2(S_n-S_{n-1}) \end{array}$$

이때 $S_n-S_{n-1}=a_n\ (n\geq 2)$이므로 $a_{n+1}=2a_n\ (n\geq 2)$ …… ㉠

$S_2=2S_1+3$에서 $a_1+a_2=2a_1+3$이고 $a_1=S_1=1$이므로

$1+a_2=2\cdot 1+3 \quad \therefore a_2=4$

㉠에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 둘째항부터 공비가 2인 등비수열이므로 $a_1=1$, $a_n=2^n\ (n\geq 2)$

$\therefore a_{12}=2^{12}$

답 ②

1157 $S_n=2a_n-2\ (n=1, 2, 3, \cdots)$에서

$S_{n+1}=2a_{n+1}-2$

한편, $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}-2-(2a_n-2)$

$\therefore a_{n+1}=2a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=2$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

따라서 $a_k=256$에서

$2^k=2^8 \quad \therefore k=8$

답 8

1158 $3S_n=a_{n+1}-2$의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하여 두 식을 빼면

$$\begin{array}{rl} & 3S_n=a_{n+1}-2 \\ -) & 3S_{n-1}=a_n-2\ (n\geq 2) \\ \hline & 3a_n=a_{n+1}-a_n \end{array}$$

$\therefore a_{n+1}=4a_n\ (n\geq 2)$ …… ㉠ ㉮

$3S_1=a_2-2$에서 $S_1=a_1=2$이므로

$3\cdot 2=a_2-2 \quad \therefore a_2=6+2=8$ ㉯

㉠에서 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 공비가 4인 등비수열이고

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{8}{2}=4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열이다.

따라서 $a_n=2\cdot 4^{n-1}$이므로

$a_5=2\cdot 4^4=512$ ㉰

답 512

단계	채점요소	배점
㉮	a_n의 관계식 구하기	30 %
㉯	a_2 구하기	20 %
㉰	a_5 구하기	50 %

1159 $a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$이라 하면

$a_{n+1}=3(a_1+a_2+\cdots+a_n)=3S_n$

그런데 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=3S_n$이므로

$S_{n+1}=4S_n$

이때 $a_1=S_1=4$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.

따라서 $S_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=4^n-4^{n-1}$

$=3\cdot 4^{n-1}\ (n\geq 2)$

$\therefore a_9=3\cdot 4^8=3\cdot 2^{16}$

답 ③

1160 조건 (가), (나)에서 $p(1)$이 참이므로 $p(2)$도 참이다.

또한 조건 (다)에서 $p(2)$가 참이면 $p(4)$도 참이다.

ㄱ. $p(5)$는 주어진 조건에서 참, 거짓을 판별할 수 없다.

ㄴ. 조건 (다)에서 $p(4)$가 참이면 $p(7)$도 참이고, 조건 (나)에서 $p(7)$이 참이면 $p(8)$도 참이다.

ㄷ. 조건 (다)에서 $p(8)$이 참이면 $p(13)$도 참이다.

따라서 참인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

1161 (i) $n=\boxed{2}$일 때, $p(n)$이 성립함을 보인다.

(ii) $n=k$일 때, $p(n)$이 성립한다고 가정하면

$n=\boxed{k+3}$일 때도 $p(n)$이 성립함을 보인다.

답 ④

1162 (ii) $n=\boxed{k}$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$ …… ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{2^k}$을 더하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+\boxed{2^k}=2^k-1+\boxed{2^k}$

$=\boxed{2^{k+1}-1}$

따라서 $n=\boxed{k+1}$일 때도 ㉠이 성립한다.

답 (가) k (나) 2^k (다) $2^{k+1}-1$ (라) $k+1$

1163 (ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ …… ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{2k+1}$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}=k^2+\boxed{2k+1}$

$=\boxed{(k+1)^2}$

답 (가) $2k+1$ (나) $(k+1)^2$

1164 (ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$ …… ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{(k+1)^3}$을 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{(k+1)^3}$

$=(1+2+3+\cdots+k)^2+\boxed{(k+1)^3}$

$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+\boxed{(k+1)^3}$

$=\frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$=\boxed{\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2}$

답 (가) $\boldsymbol{(k+1)^3}$ (나) $\boldsymbol{\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2}$

1165 (ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$a_k=\boxed{\frac{2k-1}{k}}$에서

$a_{k+1}=\frac{4-a_k}{3-a_k}=\frac{4-\frac{2k-1}{k}}{3-\frac{2k-1}{k}}=\boxed{\frac{2k+1}{k+1}}=\frac{2(k+1)-1}{k+1}$

답 (가) $\boldsymbol{\frac{2k-1}{k}}$ (나) $\boldsymbol{\frac{2k+1}{k+1}}$

1166 (ii) $n=k$ $(k\geq 4)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots k>2^k$ …… ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{k+1}$을 곱하면

$1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots k\cdot(\boxed{k+1})>2^k\cdot(\boxed{k+1})>2^{k+1}$

($\because$ $k\geq 4$이므로 $k+1>\boxed{2}$)

답 ①

1167 (ii) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$ …… ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{\frac{1}{k+1}}$을 더하면

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{k+1}}>\frac{2k}{k+1}+\boxed{\frac{1}{k+1}}$

이때 $n\geq 2$이므로

$\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$

$=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$

에서 $\frac{2k}{k+1}+\boxed{\frac{1}{k+1}}>\boxed{\frac{2(k+1)}{k+2}}$

$\therefore 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{k+1}}>\boxed{\frac{2(k+1)}{k+2}}$

답 ④

유형 up

본문 153쪽

1168 주어진 식의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하여 두 식을 빼면

$a_{n+1}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n$

$-)\ a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}$

$a_{n+1}-a_n=na_n$

위의 식의 양변을 a_n으로 나누면

$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=n,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}-1=n$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=n+1$

따라서 $n=29$를 대입하면

$\frac{a_{30}}{a_{29}}=29+1=30$

답 ③

1169 $a_n+a_{n+1}=(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_1+a_2=-1$에서 $a_2=-2$

$a_2+a_3=1$에서 $a_3=3$

$a_3+a_4=-1$에서 $a_4=-4$

⋮

$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore a_{15}+a_{20}+a_{25}=15-20+25=20$

답 ②

1170 $(n+1)a_n=na_{n+1}-1$의 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}$

$b_n=\frac{a_n}{n}$으로 놓으면

$b_n=b_{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n(n+1)}$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$b_2-b_1=\frac{1}{1\cdot 2}$

$b_3-b_2=\frac{1}{2\cdot 3}$

$b_4-b_3=\frac{1}{3\cdot 4}$

⋮

$+)\ b_n-b_{n-1}=\frac{1}{(n-1)n}$

$b_n-b_1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}$

$$\therefore b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\frac{a_1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2+\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=2+1-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{3n-1}{n}$$

$\frac{a_n}{n}=\frac{3n-1}{n}$이므로 $a_n=3n-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(3k-1)=3\cdot\frac{10\cdot11}{2}-10=155$

답 **155**

1171 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=160\cdot\frac{3}{4}=120$이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

$a_n=120\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$a_n<50$에서 $120\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}<50$

$\therefore 12\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}<5$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 12+(n-1)\log\frac{3}{4}<\log 5$

$2\log 2+\log 3+(n-1)(\log 3-2\log 2)<1-\log 2$

$(n-1)(2\log 2-\log 3)>3\log 2+\log 3-1$

$(n-1)(0.6-0.48)>0.9+0.48-1$

$0.12(n-1)>0.38$

$n-1>\frac{19}{6}$

$\therefore n>\frac{25}{6}=4.\times\times\times$

따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다.

답 **5**

1172 첫날은 9 km를 뛰었으므로 $a_1=9$

훈련을 시작하여 2일째 되는 날은 전날 뛴 거리의 $\frac{4}{3}$배보다 2 km 적은 거리를 뛰므로 $a_2=9\cdot\frac{4}{3}-2=10$

마찬가지로 훈련을 시작하여 $(n+1)$일째 되는 날은 n일째 되는 날 뛴 거리의 $\frac{4}{3}$배보다 2 km 적은 거리를 뛰므로

$a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n-2$

답 $a_1=9,\ a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n-2$

1173 두 그릇 A와 B에 들어 있는 물의 총량은 3 L이므로 그릇 A에 들어 있는 물의 양이 a_n L이면 그릇 B에 들어 있는 물의 양은 $(3-a_n)$ L이다.

그릇 A에서 50 %의 물을 퍼내어 그릇 B에 부으면 그릇 B에 들어 있는 물의 양은

$(3-a_n)+\frac{1}{2}a_n=3-\frac{1}{2}a_n$

다시 그릇 B에서 50%의 물을 퍼내어 그릇 A에 부으면 그릇 A에 들어 있는 물의 양은

$\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{2}a_n\right)=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{2}$

즉 $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{2}$이므로

$p=\frac{1}{4},\ q=\frac{3}{2}$

$\therefore p+q=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}$

답 $\frac{7}{4}$

시험에 꼭 나오는 문제 본문 154~157쪽

1174 $a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고 $a_1=4,\ a_2-a_1=3$이므로 첫째항이 4, 공차가 3이다.

$\therefore a_n=4+(n-1)\cdot3=3n+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(3k+1)$
$=3\cdot\frac{10\cdot11}{2}+10$
$=175$

답 **175**

1175 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}$에서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=1$, 공차가 $\frac{1}{3}$인 등차수열이므로

$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n+2}{3}$

$a_n=\frac{3}{n+2}$이므로 $a_{10}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

답 ②

1176 $a_{n+1}^{\ 2}=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 $a_1=3$, $a_2=9$이므로 공비는 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{9}{3}=3$이다.

$\therefore a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

$\therefore a_{20}=3^{20}$

답 ③

1177 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 -2인 등비수열이므로
$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}>300$에서
$(-2)^{n-1}>100$
따라서 자연수 n의 최솟값은 9이다.

답 ②

1178 $a_{n+1}=a_n+n+1$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2=a_1+1+1\\
&a_3=a_2+2+1\\
&a_4=a_3+3+1\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n=a_{n-1}+(n-1)+1\\
\hline
&a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\\
&\quad=1+\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)\\
&\quad=\frac{n^2+n}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_k}&=\sum_{k=1}^{15}\frac{2}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{15}\frac{2}{k(k+1)}\\
&=2\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)\right\}\\
&=2\left(1-\frac{1}{16}\right)\\
&=\frac{15}{8}
\end{aligned}$$

답 $\frac{15}{8}$

1179 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$이므로
$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2=a_1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\\
&a_3=a_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\
&a_4=a_3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\\
\hline
&a_n=a_1+\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\right\}\\
&\quad=a_1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\\
&\quad=\frac{3}{25}+\frac{n-1}{2n-1}
\end{aligned}$$

$\frac{3}{25}+\frac{n-1}{2n-1}=\frac{3}{5}$에서 $\frac{n-1}{2n-1}=\frac{12}{25}$
$\therefore n=13$
따라서 $\frac{3}{5}$은 제 13 항이다.

답 ⑤

1180 $a_{n+1}=2^n a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
&a_2=2a_1\\
&a_3=2^2a_2\\
&a_4=2^3a_3\\
&\quad\vdots\\
\times)\ &a_{10}=2^9a_9\\
\hline
&a_{10}=2\cdot2^2\cdot2^3\cdot\cdots\cdot2^9\cdot a_1
\end{aligned}$$

$a_1=1$이므로
$a_{10}=2^{1+2+3+\cdots+9}=2^{\frac{9\cdot10}{2}}=2^{45}$
$\therefore \log_2 a_{10}=\log_2 2^{45}=45$

답 **45**

1181 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
&\frac{a_2}{a_1}=\frac{1\cdot3}{2^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\\
&\frac{a_3}{a_2}=\frac{2\cdot4}{3^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\\
&\frac{a_4}{a_3}=\frac{3\cdot5}{4^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\\
&\quad\vdots\\
\times)\ &\frac{a_{10}}{a_9}=\frac{9\cdot11}{10^2}=\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}\\
\hline
&\frac{a_{10}}{a_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{10}=\frac{11}{20}
\end{aligned}$$

$\therefore a_{10}=\frac{11}{20}a_1=\frac{11}{20}\cdot20=11$

답 **11**

1182 $a_n+a_{n+1}=2n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{12}a_k&=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{11}+a_{12})\\
&=(2\cdot1+1)+(2\cdot3+1)+(2\cdot5+1)+\cdots+(2\cdot11+1)\\
&=3+7+11+15+19+23\\
&=\frac{6(3+23)}{2}=78
\end{aligned}$$

답 ③

1183 $2S_{n+1}=S_n+3$의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하여 두 식을 빼면

$2S_{n+1}=S_n+3$

$-)\ 2S_n=S_{n-1}+3\ (n\geq 2)$

$2S_{n+1}-2S_n=S_n-S_{n-1}$

이때 $S_n-S_{n-1}=a_n\ (n\geq 2)$이므로

$2a_{n+1}=a_n$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\ (n\geq 2)$

$2S_2=S_1+3$에서 $2(a_1+a_2)=a_1+3$이고 $a_1=S_1=1$이므로

$2(1+a_2)=4$

$\therefore a_2=1$

따라서 $a_1=1$, $a_n=a_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\ (n\geq 2)$이므로

$$S_{10}=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k=1+\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=3-\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

즉 $p=3$, $q=8$이므로

$p+q=11$

답 ⑤

1184 ㈎, ㈏에서 $p(1)$이 참이므로 $p(3)$은 참이다.

㈏에서 $p(3)$이 참이면 $p(4)$도 참이다.

같은 방법으로 $p(5)$, $p(6)$도 참임을 알 수 있지만 $p(2)$의 참, 거짓은 알 수 없다.

답 ①

1185 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\boxed{\frac{1}{2}}$, (우변)$=2-\frac{1+2}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉡의 양변에 $\boxed{\frac{k+1}{2^{k+1}}}$을 더하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\boxed{\frac{k+1}{2^{k+1}}}$$

$$=2-\frac{k+2}{2^k}+\boxed{\frac{k+1}{2^{k+1}}}$$

$$=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}$$

$$=2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$$

답 ㈎ $\frac{1}{2}$ ㈏ $\frac{k+1}{2^{k+1}}$

1186 (i) $n=1$일 때, $1^3+2\cdot 1=3$은 3의 배수이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, k^3+2k가 3의 배수,

즉 $k^3+2k=3m$ (m은 자연수)이라 하면

$(k+1)^3+2(k+1)$

$=k^3+3k^2+3k+1+2k+2$

$=(k^3+2k)+\boxed{3k^2+3k+3}$

$=3\boxed{m}+\boxed{3k^2+3k+3}$

이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 n^3+2n은 3의 배수이다.

따라서 $f(k)=3k^2+3k+3$, $g(m)=m$이므로

$\frac{g(18)}{f(1)}=\frac{18}{9}=2$

답 2

1187 (ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}\geq 2-\frac{1}{\sqrt{k}}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉡의 양변에 $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$을 더하면

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq 2-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

그런데 모든 자연수 k에 대하여 $4k\geq k+1$이므로

$2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\geq 0$이다.

$$\therefore\left(2-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)-\left(\boxed{2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\boxed{2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}}{\sqrt{k^2+k}}\geq 0$$

즉 $2-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq\boxed{2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}}$이 성립하므로

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq\boxed{2-\frac{1}{\sqrt{k+1}}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

답 ④

1188 $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$에서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=3$, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_{n+1}-a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2-a_1=3$

$a_3-a_2=3^2$

$a_4-a_3=3^3$

⋮

$+)\ a_n-a_{n-1}=3^{n-1}$

$$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}3^k$$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$$

$$=a_1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$=\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)+a_1$

$a_5=\frac{3}{2}(3^4-1)+a_1=122$에서 $a_1=2$

$a_2-a_1=3$이므로 $a_2=a_1+3=2+3=5$

답 ④

1189 $\overline{P_nP_{n+1}}=a_n$이라 하면 규칙 (다)에서

$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

위의 식의 n에 2, 3, 4, …, k를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2=\frac{1}{3}a_1$

$a_3=\frac{2}{4}a_2$

$a_4=\frac{3}{5}a_3$

⋮

$a_{k-1}=\frac{k-2}{k}a_{k-2}$

$\times)\ a_k=\frac{k-1}{k+1}a_{k-1}$

$a_k=a_1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{k-2}{k}\cdot\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{k(k+1)}$

따라서 $S_k=\frac{1}{2}a_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}S_k=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

따라서 $p=11$, $q=10$이므로

$p+q=21$

답 **21**

1190 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=2+3(n-1)=3n-1$ …… (가)

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=155$에서

$3n^2+n-310=0$, $(n-10)(3n+31)=0$

그런데 n은 자연수이므로 $n=10$ …… (나)

답 **10**

단계	채점요소	배점
(가)	일반항 a_n 구하기	40 %
(나)	n의 값 구하기	60 %

1191 $a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$의 양변을 제곱하면 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. 이때 공비를 r라 하면

$a_4=3r^3=24$, $r^3=8$ $\therefore r=2$

$\therefore a_n=3\cdot2^{n-1}$ …… (가)

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}3\cdot2^{k-1}=\frac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3\cdot2^{10}-3$ …… (나)

따라서 $p=3$, $q=3$이므로

$p-q=0$ …… (다)

답 **0**

단계	채점요소	배점
(가)	일반항 a_n 구하기	40 %
(나)	$\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값 구하기	30 %
(다)	$p-q$의 값 구하기	30 %

1192 $S_n=n^2a_n$의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하여 두 식을 빼면

$S_n=n^2a_n$

$-)\ S_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1}\ (n\geq2)$

$a_n=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$

즉 $(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$이므로

$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}\ (n\geq2)$ …… (가)

위의 식의 n에 2, 3, 4, …, 10을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2=\frac{1}{3}a_1$

$a_3=\frac{2}{4}a_2$

$a_4=\frac{3}{5}a_3$

⋮

$a_9=\frac{8}{10}a_8$

$\times)\ a_{10}=\frac{9}{11}a_9$ …… (나)

$a_{10}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{9}{11}\cdot a_1=\frac{1}{55}$ …… (다)

답 $\frac{1}{55}$

단계	채점요소	배점
(가)	주어진 S_n의 관계식을 이용하여 a_n의 관계식 구하기	50 %
(나)	n에 2부터 10까지 대입한 식 구하기	30 %
(다)	a_{10} 구하기	20 %

1193 $3+7+11+\cdots+(4n-1)=2n^2+n$ …… ㉠

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=2+1=3$

따라서 $n=1$일 때, ㉠이 성립한다.

..... ㉮

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$3+7+11+\cdots+(4k-1)=2k^2+k$ ..... ㉡

..... ㉯

㉡의 양변에 $4k+3$을 더하면

$3+7+11+\cdots+(4k-1)+(4k+3)$

$=2k^2+k+4k+3$

$=2(k^2+2k+1)+k+1$

$=2(k+1)^2+(k+1)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

..... ㉰

답 풀이 참조

단계	채점요소	배점
㉮	$n=1$일 때, 주어진 명제가 성립함을 보이기	30 %
㉯	$n=k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하기	20 %
㉰	$n=k+1$일 때도 주어진 명제가 성립함을 보이기	50 %

1194 $a_{n+1}+a_n=b_{n+1}-b_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2+a_1=b_2-b_1$

$a_3+a_2=b_3-b_2$

$a_4+a_3=b_4-b_3$

⋮

$+)\ a_{10}+a_9=b_{10}-b_9$

$2(a_1+a_2+\cdots+a_{10})-a_1-a_{10}=b_{10}-b_1$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\frac{1}{2}(a_1-b_1+a_{10}+b_{10})$

$=\frac{1}{2}(0+30)$

$=15$

답 **15**

1195 (ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$a_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}>1$

이때

$a_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$

$=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-\boxed{\frac{1}{k+1}}$

한편, $(3k+2)(3k+4)=9k^2+18k+8$이고

$(3k+3)^2=9k^2+18k+9$이므로

$(3k+2)(3k+4)\boxed{<}(3k+3)^2$

$\therefore \frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}=\frac{(3k+4)+(3k+2)}{(3k+2)(3k+4)}$

$=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}$

$>\frac{6k+6}{(3k+3)^2}=\boxed{\frac{2}{3k+3}}$

그런데 $a_k>1$이므로

$a_{k+1}>a_k+\left(\frac{1}{3k+3}+\boxed{\frac{2}{3k+3}}\right)-\boxed{\frac{1}{k+1}}>1$

답 (가) $\frac{1}{k+1}$ (나) $<$ (다) $\frac{2}{3k+3}$

1196 $\mathrm{P}_n(x_n)$이라 하면

$x_{n+2}=\frac{3x_n+2x_{n+1}}{5}=\frac{3}{5}x_n+\frac{2}{5}x_{n+1}$

$n=1$일 때

$x_3=\frac{3}{5}x_1+\frac{2}{5}x_2$에서 $x_1=0$, $x_2=8$이므로

$x_3=\frac{16}{5}$

$n=2$일 때

$x_4=\frac{3}{5}x_2+\frac{2}{5}x_3$에서 $x_2=8$, $x_3=\frac{16}{5}$이므로

$x_4=\frac{3}{5}\cdot 8+\frac{2}{5}\cdot\frac{16}{5}=\frac{152}{25}$

$n=3$일 때

$x_5=\frac{3}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4$에서 $x_3=\frac{16}{5}$, $x_4=\frac{152}{25}$이므로

$x_5=\frac{3}{5}\cdot\frac{16}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{152}{25}=\frac{544}{125}$

$\therefore \mathrm{P}_5\left(\frac{544}{125}\right)$

답 $\frac{544}{125}$

memo

memo

memo